

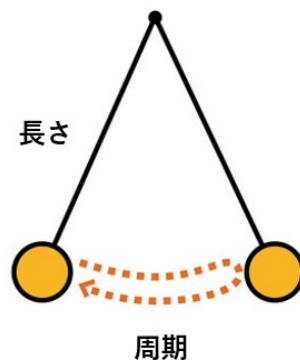
# 「 $y$ は $x$ の二乗に比例する関数の利用」 頻出・応用問題の解き方

## 振り子の問題

「振り子」ってわかるかな? 「振り子時計」や「理科の実験」で見たことがある人もいるんじゃないかな?

実は、振り子の動きは「二乗に比例する関数」にもものすごく関係しているんだ。

振り子が、行って帰ってくるまでの時間のことを「周期」と呼ぶよ。  
周期と関係しているものは振り子の長さなんだ。



振り子の周期 $x$ 秒と長さ $y$ mの関係

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

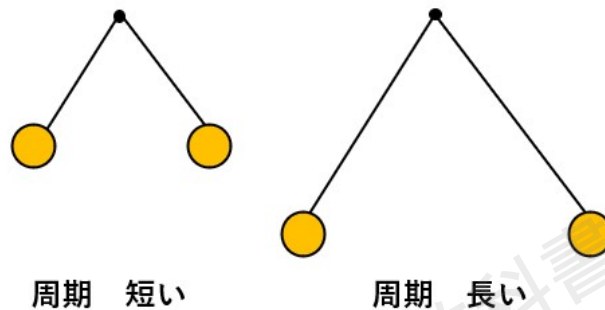
で表される。

$y = ax^2$ の形になっているから、「二乗に比例する関数」といえるよね。

上の式から周期 $x$ が長いほど、振り子の長さが長くなることがわかるかな。



ただ、想像してみたら当たり前のことだよ。下図の振り子で周期が短いのはどちらかと聞かれたら、長さが短い左側になるね。



### 振り子の長さを求める問題

#### 例題

振り子の周期が $x$ 秒で、振り子の長さが $y$ mの振り子には $y = \frac{1}{4}x^2$ という関係がある。

周期が6秒だった時、振り子の長さを求めなさい。

周期が6秒ということは、 $x=6$ ってことだよ。だから、 $x=6$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入するよ。

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = \frac{1}{4} \times 6^2$$

$$y = \frac{1}{4} \times 36$$

$$y = 9$$

振り子の長さは9mと求めることができるね。

ハイジのブランコの長さを求める

アルプスの少女ハイジって知っているかな？スイスで作られた話なんだけど、日本でも放送されていたんだよ。



10年前にはCMにも登場していたんだ。そのCMでは、ハイジという少女がブランコに乗っているんだけど、そのブランコの長さがあまりにも長すぎると話題にもなったんだ。



今でもユーチューブで「ハイジ ブランコ」と調べたらブランコの映像が出てくるから、気になる人は動画を観てみて、周期を測ってみてね!!

動画で確認してみると、なんと周期は10秒もあるよ。

ということは、

$x=10$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入するよ。

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

$$y=\frac{1}{4}\times 10^2$$

$$y=\frac{1}{4}\times 100$$

$$y=25$$

ハイジが乗っているブランコの長さは25mということがわかるね。

25mというと、マンションの7~8階の高さと同じくらいになるよ。

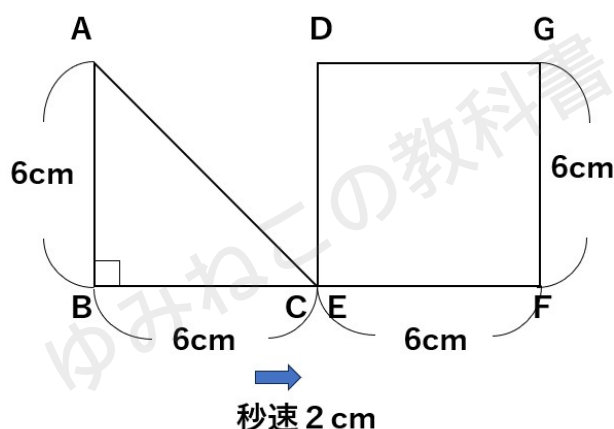
25mの長さのブランコを笑顔で乗っているハイジはすごい勇者だと言えるね。



## 面積を求める問題

### 例題

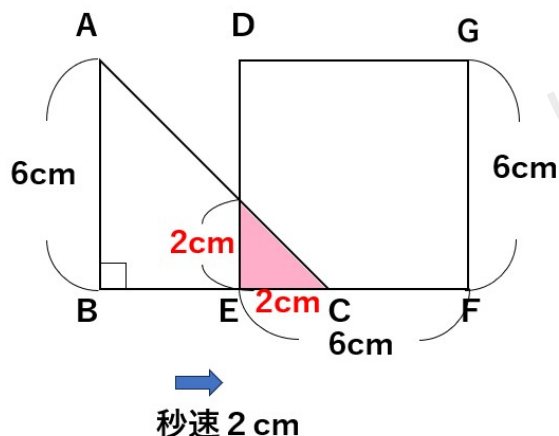
下の図のように、直角二等辺三角形 ABC と正方形 DEFG が並んでいる。  
正方形を固定し、直角二等辺三角形 ABC を矢印の方向に秒速 2 cm で点 C が点 F に  
重なるまで動かす。



- (1) 1秒後に、直角二等辺三角形と正方形が重なってできる部分の面積を求めなさい。
- (2)  $x$ 秒後に、重なってできる部分の面積を  $y \text{ cm}^2$  とすると、 $y$  を  $x$  の式で表しなさい。

(1) 1秒後の直角二等辺三角形と正方形が重なってできる部分の面積の求め方

1秒後には  $2 \times 1 = 2 \text{ cm}$  進むから、次のようになっているよ。



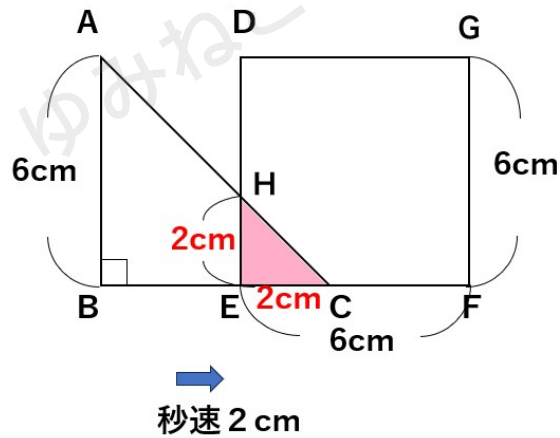
ここで大事なことは、重なる部分（ピンク色）が直角二等辺三角形になるということ。  
つまり、2辺の長さが等しくなるから、2辺が2cmになるよ。

疑問に思ったら読もう！

なぜ重なる部分が直角二等辺三角形になるの？

辺 AC と辺 DE の交点を H とするよ。

- ① 三角形 ABC は、直角二等辺三角形なので、 $\angle A = \angle C$  だね。
- ②  $\angle B = \angle E = 90^\circ$  なので、辺 AB と辺 DE は平行だね。



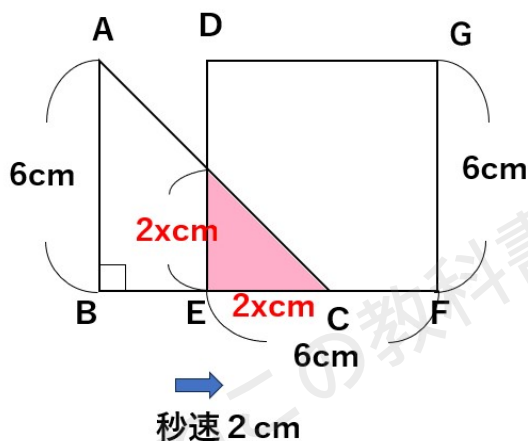
- ④  $\angle EHC$  は、 $\angle A$  と同位角なので、①より、 $\angle EHC = \angle C$  だね。  
2角が等しいので、三角形 EHC は、二等辺三角形となるよ。  
なので、辺 EH = 辺 EC となるんだね。

2つの図形が重なっている部分は、1辺が2cmの直角二等辺三角形になって、  
面積は（底辺）×（高さ）÷2だから  
 $2 \times 2 \div 2 = 2 \text{ cm}^2$   
と求められるね。



(2)  $x$  秒後に、重なってできる部分の面積を  $y \text{ cm}^2$  としたとき、 $y$  を  $x$  の式で表す

$x$  秒後には  $2 \times x = 2x \text{ cm}$  進むから、次のようになっているよ。



2つの図形が重なっている部分は、1辺が  $2x \text{ cm}$  の直角二等辺三角形になって、

面積  $y$  は (底辺)  $\times$  (高さ)  $\div 2$  だから

$$y = 2x \times 2x \div 2 = 2x^2 \text{ cm}^2$$

と求められるね。

$y = 2x^2$  という式で表されるから、これも「二乗に比例する関数」といえるね。

## 制動距離の問題

せいどうきょり  
「制動距離」という言葉は、車の運転をしたことがないと、あまり聞かないかもしれないね。

制動距離とは、車を走らせていたとき、ブレーキをかけてから、実際に車が完全に止まるまでの距離のことなんだ。

「車は急に止まれない」と言うよね。

例えば、みんなはゆっくり歩いているとき、急に止まろうと思えば、ピタッと急に止まったりできるよね。

でも、もし全力疾走で走っていたらどうかな？

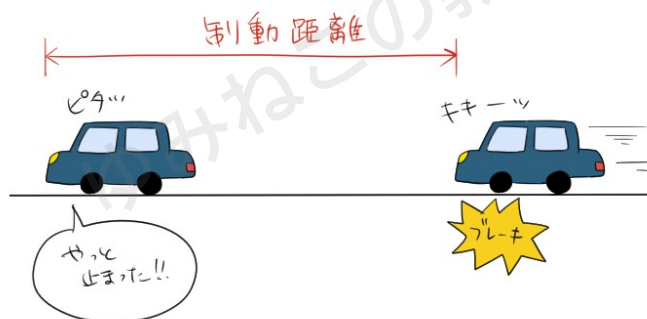
急にピタッと止まろうとしても、前につんのめって倒れそうにならないかな？



これは、「運動をしている物体は、外から力を加えないかぎり、そのまま運動を続けようとする力（慣性の法則）」がはたらくからなんだ。

スピードを出している車も同じで、運動を続けようとする力がはたらくのを、タイヤと地面の摩擦抵抗で止めようとするんだよ。

そうやって「車が完全に止まる」までにかかる時間によって、車が進んでしまう距離が「制動距離」なんだね。



この制動距離は、速さの二乗に比例するんだ。

つまり速ければ速いほど、止まるまでの距離が長くなるってことだよ。なんとなくイメージできるよね。

時速100kmの車と、時速10kmの車では止まるまでの距離が全く違うからね。

## 速さと制動距離の関係

### 例題

時速60kmの車の制動距離は27kmである。

このとき時速 $x$ kmの制動距離が $y$ kmとして、 $y$ を $x$ の式で表しなさい。

制動距離 $y$ は、速さ $x$ の二乗に比例するから、 $y = ax^2$ という式になるよ。



$a$ の値を求めるために、 $x = \text{時速 } 60 \text{ km}$ と $y = 27 \text{ km}$ を代入してみよう。

$$y = a x^2$$

$$27 = a \times 60^2$$

$$27 = a \times 3600$$

$$27 = 3600 a$$

$$a = \frac{27}{3600}$$

$$a = \frac{3}{400}$$

$a$ の値が求まったから、もとの式に代入して

$$y = \frac{3}{400} x^2$$

という式になるね。

## 時速100 kmの制動距離

例題

$y = \frac{3}{400} x^2$ を使って、時速100 kmの制動距離を求めなさい。

制動距離は $x$ だから、 $x = 100$ を $y = \frac{3}{400} x^2$ に代入してみよう。

$$y = \frac{3}{400} x^2$$

$$y = \frac{3}{400} \times 100^2$$

$$y = \frac{3}{400} \times 10000$$

$$y = 75$$

時速100 kmの制動距離が75 mと求めたね。つまり、ブレーキをかけてから止まるまでに75 mは車が進んでことだね。

次に時速10 kmの制動距離を求めてみよう。



## 時速 10 km の制動距離

### 例題

$y = \frac{3}{400}x^2$  を使って、時速 10 km の制動距離を求めなさい。

制動距離は  $x$  だから、 $x = 10$  を  $y = \frac{3}{400}x^2$  に代入してみよう。

$$y = \frac{3}{400}x^2$$

$$y = \frac{3}{400} \times 10^2$$

$$y = \frac{3}{400} \times 100$$

$$y = 0.75$$

時速 10 km の制動距離は 0.75 m と求められたね。つまり、ブレーキをかけてから止まるまでに 0.75 m は車が進むってことだね。ただ、0.75 m って 75 cm だから本当にわずかだよ。

## 時速 10 km と時速 100 km の制動距離の違い

時速 10 km と時速 100 km のときの制動距離をまとめると次のようになるよ。

時速 10 km	時速 100 km
制動距離は 0.75 m	制動距離は 75 m

速さは 10 倍になっているけど、制動距離は 100 倍になっているよね。つまり、制動距離は速さの二乗に比例するってこと。

だから車の運転では、あまり速いスピードを出してはいけないということなんだね。



## 空走距離

免許を取るときにも大事になってくるんだけど、制動距離以外に、もう一つ大事な距離があるんだ。

それは「<sup>くうそうきょり</sup>空走距離」。

今はまだ、運転しているのは基本的に人間だよな。

人間は、「危ないっ！」と思っても、実際に手足が動くまでには、すこし時間がかかってしまうんだ。

空走距離というのは、「危ないっ」と思ってからブレーキを踏むまでの時間で進んでしまう距離のことで、これは速さに比例することが知られているよ。

だから実際は

車の停止距離 = 空走距離 + 制動距離  
と表すことができるよ。

## 料金を求める問題

「いろいろな関数の利用」では、「二乗に比例する関数」ではないものについても問題に出ることがあるよ。

ここでは、すこし変わった関数についての問題を紹介するよ。

### 例題

荷物の送料は次のようになっている。

重さ	2kg まで	5kg まで	7kg まで	9kg まで	10kg まで
料金	300 円	600 円	800 円	900 円	1000 円

このとき、重さを  $x$  kg、そのときの料金を  $y$  円としてグラフを書きなさい。



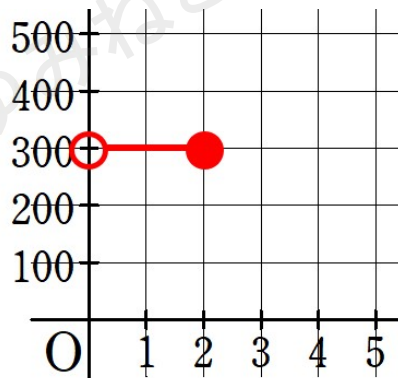
送料を見ると、次のように思う人もいるんじゃないかな？

- ・ 比例でもないな
  - ・ 反比例でもないな
  - ・ 一次関数でもないな
  - ・ 二乗に比例する関数でもないな
- どうやってグラフを描いたらいいんだろう！？

じつは、これは今までやったことがないグラフになるんだ。

順番に説明していくね。

まず、2kgまでは300円だから、グラフは次のようになるよ。



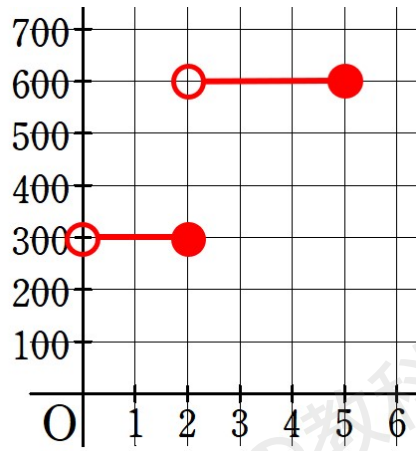
2つポイントがあるよ。

ポイント

- ・ 0kgのときは0円だよな。  
0kgなのに、料金が300円かかったらびっくりしちゃうよね。  
だから、「0kgのときは300円にはならないよ」という意味で「○」になっているよ。
- ・ 「2kgまでは300円」だから、2kgのときは300円になるよね。  
だから、「2kgのときは300円になるよよ」という意味で「●」になっているよ。
- ・ 「○」は「入らない」。「●」は「入る」と覚えておこう。



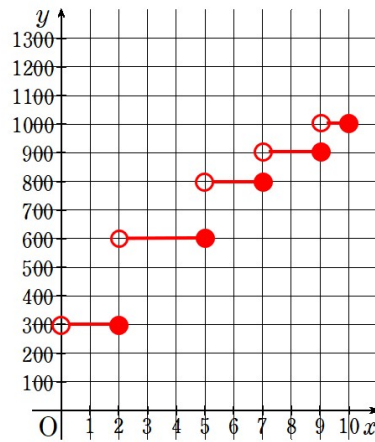
次に、5 kg までは 600 円だから、グラフは次のようになるよ。



間違えやすいところは、「2 kg のとき」。

2 kg のときは 300 円で、600 円にはならないから「○」になっているよ。

こんな感じでグラフを作っていこう。



新しい形のグラフだね。このように階段になっているグラフのことを「階段関数」というよ。

