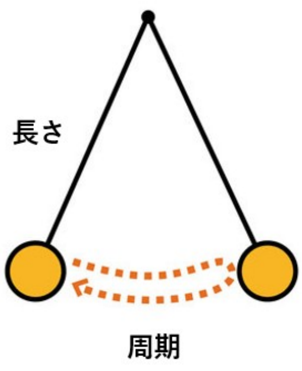
「yはxの二乗に比例する関数の利用」頻出・応用問題の解き方

振り子の問題

「振り子」ってわかるかな?「振り子時計」や「理科の実験」で見たことがある人もいるんじゃないかな?

実は、振り子の動きは「二乗に比例する関数」にものすごく関係しているんだ。

振り子が、行って帰ってくるまでの時間のことを「周期」と呼ぶよ。
周期と関係しているものは振り子の長さなんだ。

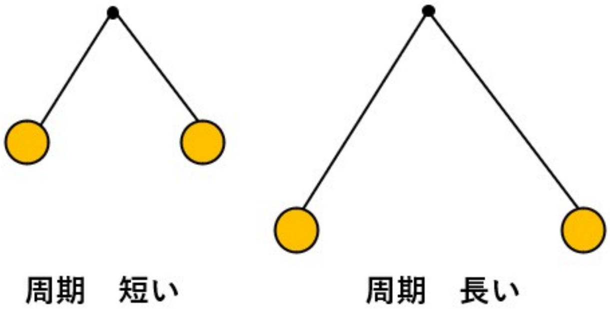


振り子の周期x秒と長さymの関係

$y=\frac{1}{4}x^2$
で表される。

$y=ax^2$の形になっているから、「二乗に比例する関数」といえるよね。
上の式から周期xが長いほど、振り子の長さが長くなることがわかるかな。

ただ、想像してみたら当たり前のことだよね。下図の振り子で周期が短いのはどちらかと聞かれたら、長さが短い左側になるね。



振り子の長さを求める問題

例題

振り子の周期がx秒で、振り子の長さがymの振り子には$y=\frac{1}{4}x^2$という関係がある。

周期が6秒だった時、振り子の長さを求めなさい。

周期が6秒ということは、x=6ってことだよね。だから、x=6を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入するよ。

$y=\frac{1}{4}x^2$

$y=\frac{1}{4}\times 6^2$

$y=\frac{1}{4}\times 36$

$y=9$

振り子の長さは9mと求めることができるね。

ハイジのブランコの長さを求める
アルプスの少女ハイジって知っているかな？スイスで作られた話なんだけど、日本でも放送されていたんだよ。

10年前にはCMにも登場していたんだ。そのCMでは、ハイジという少女がブランコに乗っているんだけれど、そのブランコの長さがあまりにも長すぎると話題にもなったんだ。

今でもユーチューブで「ハイジ ブランコ」と調べたらブランコの映像が出てくるから、気になる人は動画を観てみて、周期を測ってみてね!!

動画で確認してみると、なんと周期は10秒もあるよ。

ということは、
$x=10$を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入するよ。

$y=\frac{1}{4}x^2$

$y=\frac{1}{4}\times 10^2$

$y=\frac{1}{4}\times 100$

$y=25$

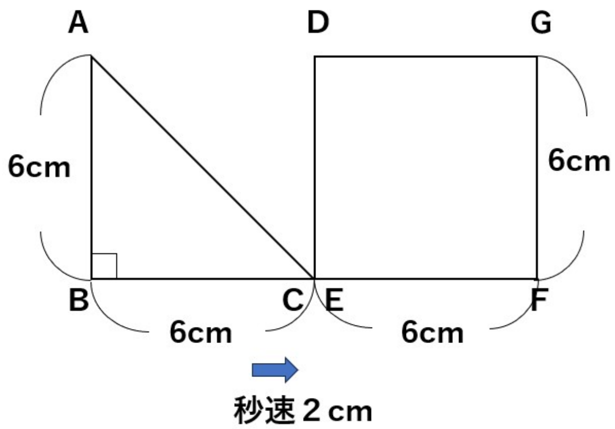
ハイジが乗っているブランコの長さは25mということがわかるね。
25mというと、マンションの7～8階の高さと同じくらいになるよ。

25mの長さのブランコを笑顔で乗っているハイジはすごい勇者だと言えるね。

面積を求める問題

例題

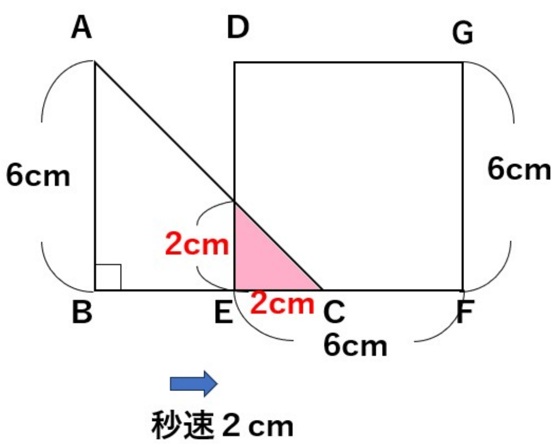
下の図のように、直角二等辺三角形 ABC と正方形 DEFG が並んでいる。
正方形を固定し、直角二等辺三角形 ABC を矢印の方向に秒速２ｃｍで点Ｃが点Ｆに重なるまで動かす。



（１）１秒後に、直角二等辺三角形と正方形が重なってできる部分の面積を求めなさい。
（２）ｘ秒後に、重なってできる部分の面積をｙｃｍ^{2}とすると、ｙをｘの式で表しなさい。

（１）１秒後の直角二等辺三角形と正方形が重なってできる部分の面積の求め方

１秒後には２×１＝２ｃｍ進むから、次のようになっているよ。

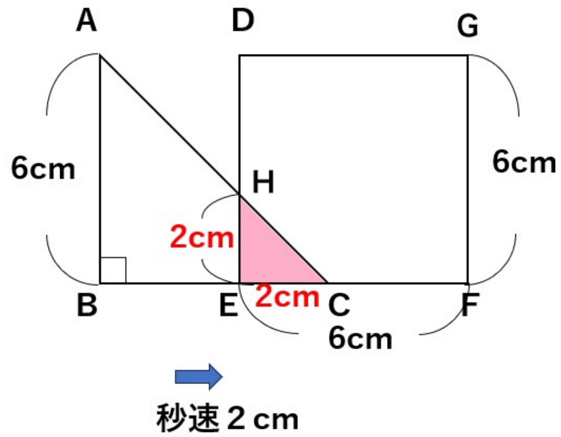


ここで大事なことは、重なる部分（ピンク色）が直角二等辺三角形になるということ。
つまり、２辺の長さが等しくなるから、２辺が２ｃｍになるよ。

疑問に思ったら読もう！
なぜ重なる部分が直角二等辺三角形になるの？

辺 AC と辺 DE の交点を H とするよ。

①三角形 ABC は、直角二等辺三角形なので、∠A＝∠C だね。
②∠B＝∠E＝９０° なので、辺 AB と辺 DE は平行だね。

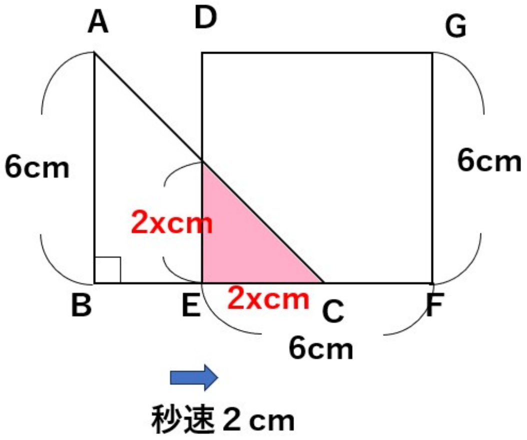


④∠EHC は、∠A と同位角なので、①より、∠EHC＝∠C だね。
２角が等しいので、三角形 EHC は、二等辺三角形となるよ。
なので、辺 EH＝辺 EC となるんだね。

２つの図形が重なっている部分は、１辺が２ｃｍの直角二等辺三角形になって、
面積は（底辺）×（高さ）÷２だから
$2 \times 2 \div 2 = 2\,\mathrm{cm}^2$
と求められるね。

（２）ｘ秒後に、重なってできる部分の面積をｙcm^2としたとき、ｙをｘの式で表す

ｘ秒後には$2 \times x = 2x$ cm進むから、次のようになっているよ。



２つの図形が重なっている部分は、１辺が２ｘｃｍの直角二等辺三角形になって、

面積ｙは（底辺）×（高さ）÷２だから
$y = 2x \times 2x \div 2 = 2x^2$ cm^2
と求められるね。

$y = 2x^2$という式で表されるから、これも「二乗に比例する関数」といえるね。

制動距離の問題

「制動距離（せいどうきょり）」という言葉は、車の運転をしたことがないと、あまり聞かないかもしれないね。
制動距離とは、車を走らせていたとき、ブレーキをかけてから、実際に車が完全に止まるまでの距離のことなんだ。

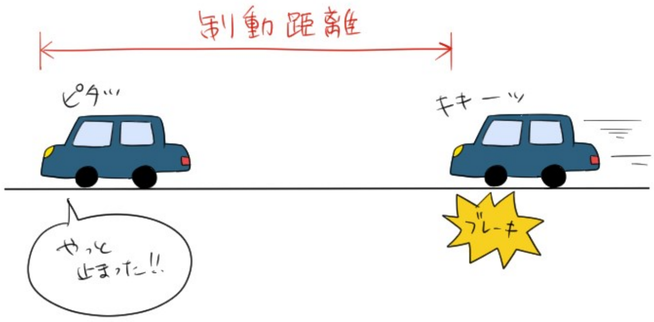
「車は急に止まれない」と言うよね。
例えば、みんなはゆっくり歩いているとき、急に止まろうと思えば、ピタっと急に止まったりできるよね。

でも、もし全力疾走で走っていたらどうかな？
急にピタッと止まろうとしても、前につんのめって倒れそうにならないかな？

これは、「運動をしている物体は、外から力を加えないかぎり、そのまま運動を続けようとする力（慣性の法則）」がはたらくからなんだ。

スピードを出している車も同じで、運動を続けようとする力がはたらくのを、タイヤと地面の摩擦抵抗で止めようとするんだよ。

そうやって「車が完全に止まる」までにかかる時間によって、車が進んでしまう距離が「制動距離」なんだね。



このは制動距離は、速さの二乗に比例するんだ。

つまり速ければ速いほど、止まるまでの距離が長くなるってことだよ。なんとなくイメージできるよね。

時速１００ｋｍの車と、時速１０ｋｍの車では止まるまでの距離が全く違うからね。

速さと制動距離の関係

例題

時速６０ｋｍの車の制動距離は２７ｋｍである。
このとき時速ｘｋｍの制動距離がｙｋｍとして、ｙをｘの式で表しなさい。

制動距離ｙは、速さｘの二乗に比例するから、$y = ax^2$という式になるよ。

ａの値を求めるために、ｘ＝時速６０ｋｍとｙ＝２７ｋｍを代入してみよう。

$y = ax^2$

$27 = a \times 60^2$

$27 = a \times 3600$

$27 = 3600a$

$a = \frac{27}{3600}$

$a = \frac{3}{400}$

ａの値が求まったから、もとの式に代入して

$y = \frac{3}{400}x^2$

という式になるね。

時速１００ｋｍの制動距離

例題

$y = \frac{3}{400}x^2$を使って、時速１００ｋｍの制動距離を求めなさい。

制動距離はｘだから、ｘ＝１００を$y = \frac{3}{400}x^2$に代入してみよう。

$y = \frac{3}{400}x^2$

$y = \frac{3}{400} \times 100^2$

$y = \frac{3}{400} \times 10000$

$y = 75$

時速１００ｋｍの制動距離が７５ｍと求めったね。つまり、ブレーキをかけてから止まるまでに７５ｍは車が進むってことだね。

次に時速１０ｋｍの制動距離を求めてみよう。

時速１０ｋｍの制動距離

例題

$y=\frac{3}{400}x^2$を使って、時速１０ｋｍの制動距離を求めなさい。

制動距離はｘだから、ｘ＝１０を$y=\frac{3}{400}x^2$に代入してみよう。

$$y=\frac{3}{400}x^2$$
$$y=\frac{3}{400}\times 10^2$$
$$y=\frac{3}{400}\times 100$$
$$y=0.75$$

時速１０ｋｍの制動距離は0.75ｍと求められたね。つまり、ブレーキをかけてから止まるまでに0.75ｍは車が進むってことだね。ただ、0.75ｍって７５ｃｍだから本当にわずかだよね。

時速１０ｋｍと時速１００ｋｍの制動距離の違い

時速１０ｋｍと時速１００ｋｍのときの制動距離をまとめると次のようになるよ。

時速１０ｋｍ	時速１００ｋｍ
制動距離は0.75ｍ	制動距離は７５ｍ

速さは１０倍になっているけど、制動距離は１００倍になっているよね。つまり、制動距離は速さの二乗に比例するってこと。

だから車の運転では、あまり速いスピードを出してはいけないということなんだね。

空走距離

免許を取るときにも大事になってくるんだけど、制動距離以外に、もう一つ大事な距離があるんだ。

それは「空走距離（くうそうきょり）」。

今はまだ、運転しているのは基本的に人間だよね。
人間は、「危ないっ！」と思っても、実際に手足が動くまでには、すこし時間がかかってしまうんだ。

空走距離というのは、「危ないっ」と思ってからブレーキを踏むまでの時間で進んでしまう距離のことで、これは速さに比例することが知られているよ。

だから実際は
車の停止距離＝空走距離＋制動距離
と表すことができるよ。

料金を求める問題

「いろいろな関数の利用」では、「二乗に比例する関数」ではないものについても問題に出ることがあるよ。
ここでは、すこし変わった関数についての問題を紹介するよ。

例題

荷物の送料は次のようになっている。

重さ	2kg まで	5kg まで	7kg まで	9kg まで	10kg まで
料金	300 円	600 円	800 円	900 円	1000 円

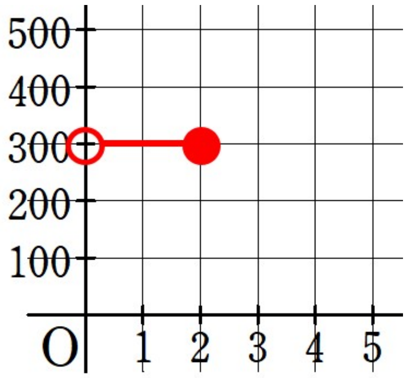
このとき、重さを x kg、そのときの料金を y 円としてグラフを書きなさい。

送料を見ると、次のように思う人もいるんじゃないかな？

・比例でもないな
・反比例でもないな
・一次関数でもないな
・二乗に比例する関数でもないな
→どうやってグラフを描いたらいいんだろう！？

じつは、これは今までやったことがないグラフになるんだ。

順番に説明していくね。
まず、２kg までは３００円だから、グラフは次のようになるよ。



２つポイントがあるよ。

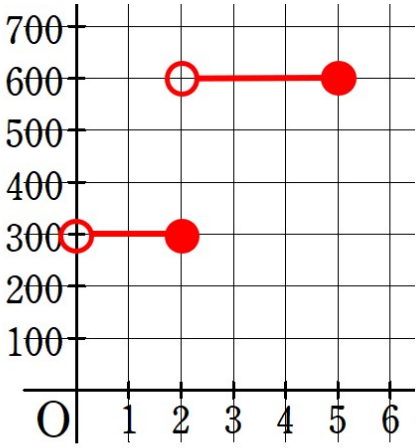
ポイント

・０kg のときは０円だよね。
　０kg なのに、料金が３００円かかったらびっくりしちゃうよね。
　だから、「０kg のときは３００円にはならないよ」という意味で「○」になっているよ。

・「２kg までは３００円」だから、２ｋｇのときは３００円になるよね。
　だから、「２kg のときは３００円になるよよ」という意味で「●」になっいるよ。

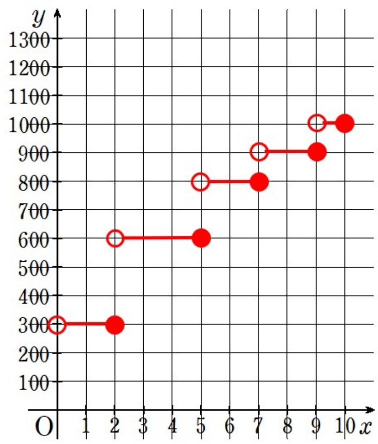
・「○」は「入らない」。「●」は「入る」と覚えておこう。

次に、５kg までは６００円だから、グラフは次のようになるよ。



間違えやすいところは、「２kg のとき」。
２kg のときは３００円で、６００円にはならないから「○」になっているよ。

こんな感じでグラフを作っていこう。



新しい形のグラフだよね。このように階段になっているグラフのことを「階段関数」というよ。