

「相似な立体の表面積と体積」を 例題を使ってわかりやすく解説

相似な立体の相似比と表面積の比を調べよう

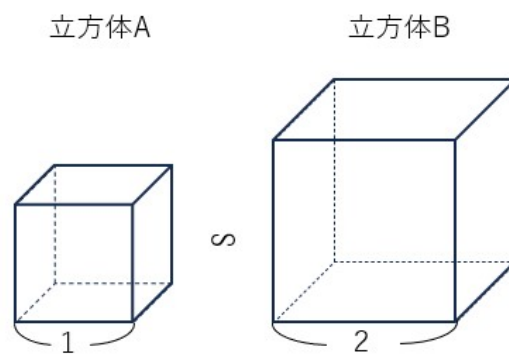
相似な図形の相似比と面積比の関係は学習したね。
今回の単元では、「相似な立体」の場合について学習するよ。

相似な立方体の相似比と表面積の比を調べよう

まずは、「相似な立体の相似比と表面積の比」はどうなるかを調べてみよう。
立体の表面積とは、「空気に触れている部分」とイメージするとよかったよね。

相似な図形の相似比と面積比に関係があったように、相似な立体の相似比と表面積の比にも関係があるよ。

わかりやすく考えるために、次のような立方体で表面積を求めてみよう。
「立方体」はすべての辺の長さが同じだから、必ず相似な立体になるんだ。



立方体Aの表面積を求めよう。

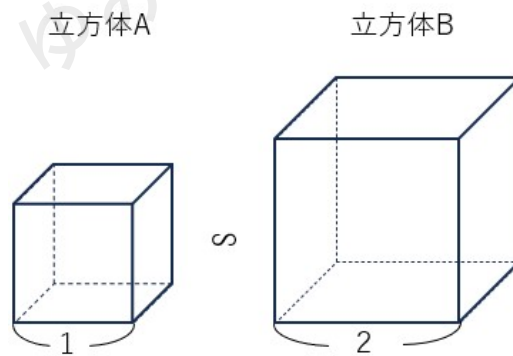
1つの正方形の面積は $1 \times 1 = 1$
 面は6つあるので表面積は $1 \times 6 = 6$

立方体Bの表面積を求めよう。

1つの正方形の面積は $2 \times 2 = 4$
 面は6つあるので表面積は $4 \times 6 = 24$

表面積の比を求めよう。

立方体Aの表面積 : 立方体Bの表面積 = $6 : 24 = 1 : 4$



相似比 $1 : 2$
 表面積の比 $1 : 4$

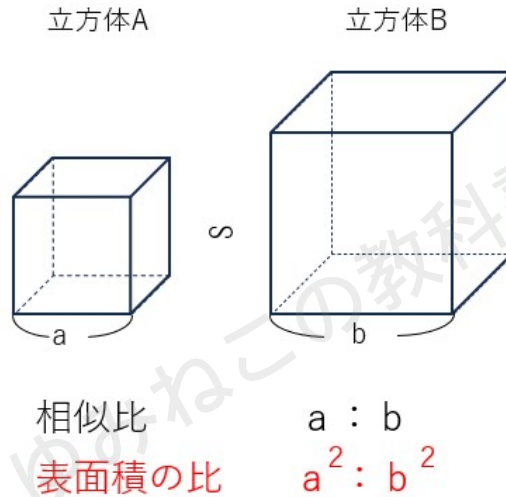
相似な立体で、相似比が $1 : 2$ のとき、表面積の比は $1 : 4 = 1^2 : 2^2$ になることがわかったね。

つまり、相似な立体の表面積の比は相似比の二乗になるんだ。



相似な立体の相似比と表面積の比

相似な立体の相似比が $a : b$ であれば、
表面積の比は $a^2 : b^2$ となる。



今回は「立方体」で相似比と表面積の比について調べたけれど、実は他の相似な立体でも、表面積の比は相似比の二乗になるんだよ。

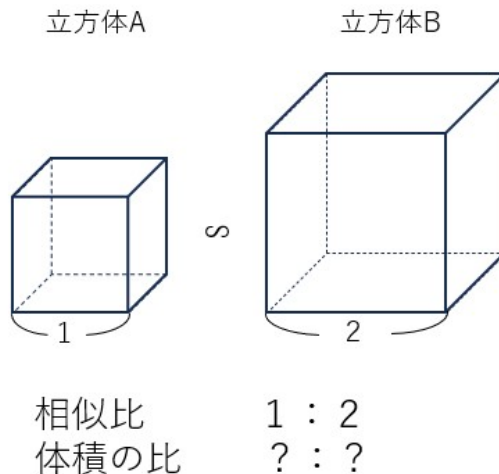
相似な立体の相似比と体積の比を調べよう

では次に「相似な立体の表面積と体積の関係」を調べよう。

表面積よりも体積の比の方が問題になりやすいから、しっかり理解しよう！

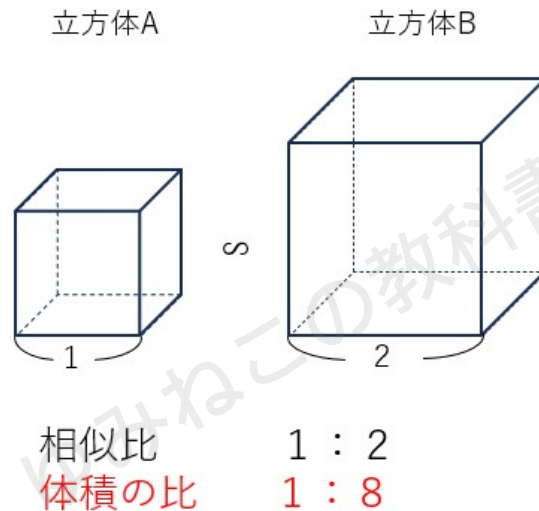
相似な立方体の相似比と体積の比を調べよう。

わかりやすく考えるために、次のような立方体で体積を求めてみよう。



立方体の体積は（1辺）×（1辺）×（1辺）で求まるから

$$\begin{aligned} \text{立方体Aの体積} : \text{立方体Bの体積} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \quad : \quad 2 \times 2 \times 2 \\ &= 1 : 8 \end{aligned}$$



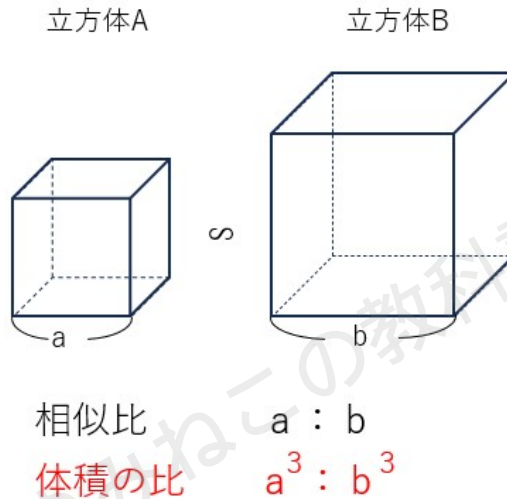
「8」を見て、あることに気づいてほしいんだけど、
「8」は2の3乗だよね。
「1」も1の3乗と考えることができるから、
体積の比は、相似比の3乗になっているよね。

相似な立体で、相似比が1:2のとき、体積の比は $1:8=1^3:2^3$ になることがわかったね。
つまり、立方体の体積の比は相似比の3乗になるんだよ。



相似な立方体の相似比と体積の比

相似な立方体の相似比が $a:b$ であれば、
体積の比は $a^3:b^3$ となる。

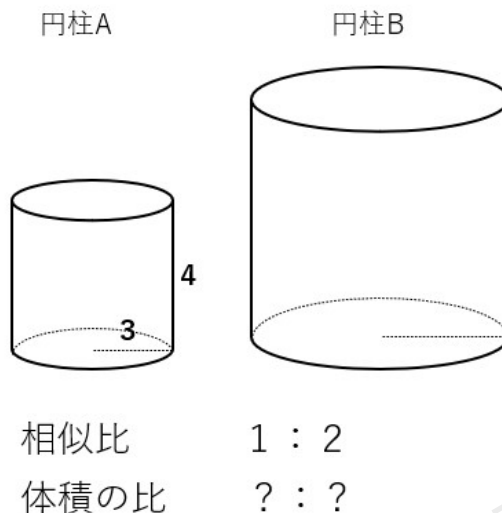


今回は「立方体」で体積の比が相似比の3乗になることがわかったね。
では、他の立体ではどうなるかを調べてみよう。

相似な円柱の相似比と体積の比を調べよう

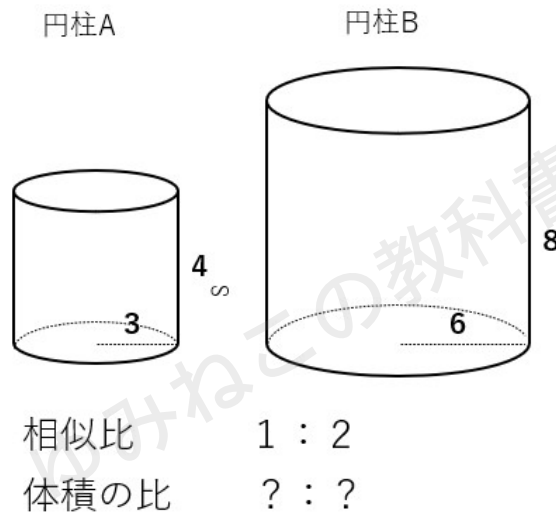
次のような相似な円柱AとBを考えよう。円柱Aの半径3、高さ4で、円柱AとBの相似比は1:2になるよ。

このときの体積の比を求めよう。



STEP1 円柱Bの底面の半径と高さを求めよう

相似比が1:2ってことは、円柱Aの長さの2倍が円柱Bの長さってことだよ。ということは、円柱Bの半径は $3 \times 2 = 6$ 、高さは $4 \times 2 = 8$ と求まるね。



STEP2 円柱Aの体積を求めよう

円柱の体積は(底面積)×(高さ)で求まるから、円柱Aの体積は

$$3 \times 3 \times \pi \times 4 = 36\pi$$

と求まるね。

STEP3 円柱Bの体積を求めよう

円柱Aと同じように計算すると、円柱Bの体積は

$$6 \times 6 \times \pi \times 8 = 288\pi$$

と求まるね

STEP4 体積の比を求めよう

円柱Aの体積:円柱Bの体積= $36\pi : 288\pi$

になるね。

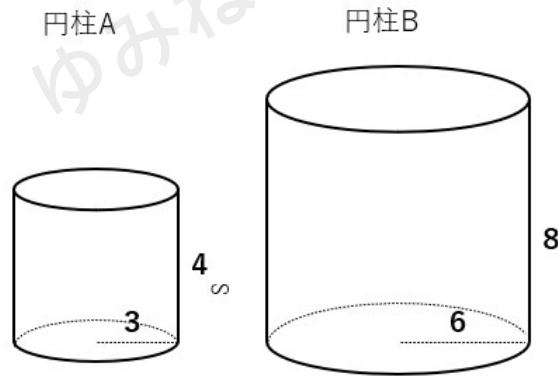


両方に π があるから、 π で割ろう

$$\begin{aligned} & \text{円柱Aの体積} : \text{円柱Bの体積} \\ & = 36\pi : 288\pi \\ & = 36\pi \div \pi : 288\pi \div \pi \\ & = 36 : 288 \end{aligned}$$

両方とも36で割ると

$$\begin{aligned} & 36 : 288 \\ & = 36 \div 36 : 288 \div 36 \\ & = 1 : 8 \end{aligned}$$



相似比 1 : 2
 体積の比 1 : 8

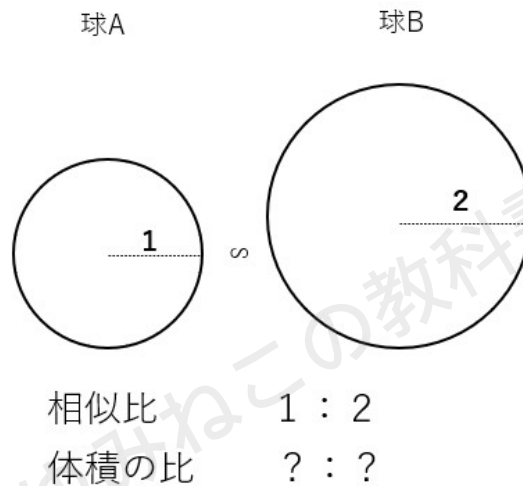
相似な円柱でも、相似比が1:2のとき、体積の比は $1:8=1^3:2^3$ になることがわかったね。

つまり、体積の比は相似比の3乗になるということが、円柱でも説明できたね。



相似な球の相似比と体積の比を調べよう

最後に相似な球AとBを考えよう。球Aの半径1、球Bの半径2のとき、体積の比を求めよう。



球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ で求まるんだったよね。「r」には球の半径を代入しよう。

球Aの体積を求めよう

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 & \quad r=1 \text{を代入しよう} \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 1^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 1 \\ &= \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

球Bの体積を求めよう

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 & \quad r=2 \text{を代入しよう} \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 2^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \times 8 \\ &= \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$



球Aと球Bの体積の比を求めよう

$$\text{球Aの体積} : \text{球Bの体積} = \frac{4}{3}\pi : \frac{32}{3}\pi$$

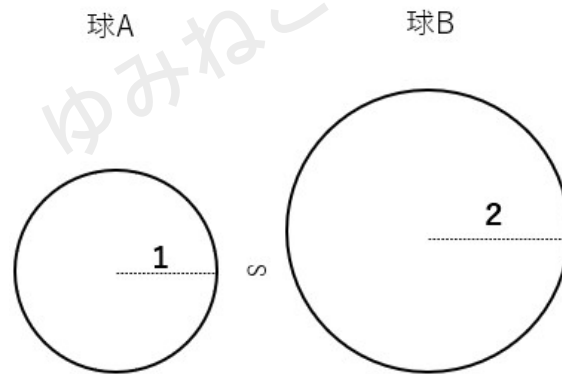
両方に π があるから「 π 」で割って、分母を消すために「3」をかけよう

球Aの体積 : 球Bの体積

$$= \frac{4}{3}\pi : \frac{32}{3}\pi$$

$$= 4 : 32 \quad \leftarrow 8 \text{で割ろう}$$

$$= 1 : 8$$



相似比 1 : 2
 体積の比 1 : 8

相似な球でも、相似比が1:2のとき、体積の比は $1:8=1^3:2^3$ になることがわかったね。

つまり、体積の比は相似比の3乗になるということが、球でも説明できたね。

相似な立体の表面積と体積の定理

相似な立体の表面積の比と体積の比には、次のような関係があるよ。

すべての相似な立体で成り立つことに注意しよう。



相似な立体の表面積と体積の定理

相似な立体では

- 表面積の比は相似比の2乗に等しい
相似比 $a:b$ ならば、表面積の比は $a^2:b^2$
- 体積の比は相似比の3乗に等しい
相似比 $a:b$ ならば、体積の比は $a^3:b^3$

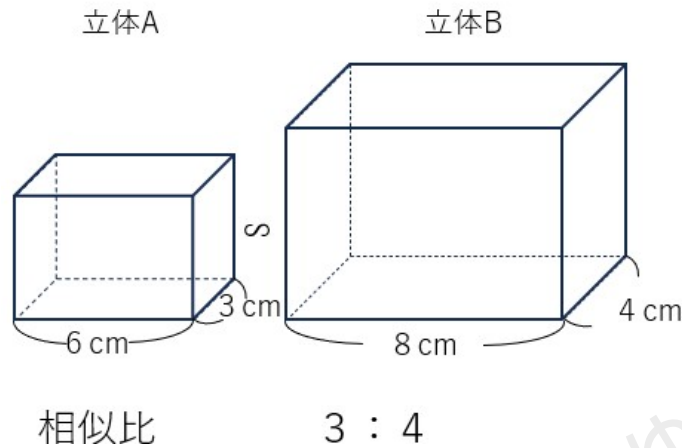
相似な立体の表面積と体積の定理を使った問題

それでは、相似な立体の表面積と体積の定理を使った問題にチャレンジしてみよう。

次の立体Aと立体Bは相似で、相似比は3:4である。

次の問に答えなさい。

ただし、立体は直方体とする。



- 1 表面積の比を求めなさい。
- 2 体積の比を求めなさい。
- 3 立体Aの体積が 54cm^3 のとき、立体Bの体積はいくつか。
- 4 立体Bの高さを求めなさい。



問題1

表面積の比は相似比の2乗だから、 $3^2:4^2=9:16$ と求めることができるよ。

問題2

体積の比は相似比の3乗だから、 $3^3:4^3=27:64$ と求められるよ。

問題3

立体Aの体積が 54cm^3 のとき、求めたい立体Bの体積を $x\text{cm}^3$ としよう。
体積の比は $27:64$ だったから、次の比例式がたてられるよ。

$$27:64=54:x$$

この比例式を解いていこう。

$$27:64=54:x$$

$$27x=64 \times 54 \quad \text{両辺を27で割ろう}$$

$$27x \div 27 = 64 \times 54 \div 27$$

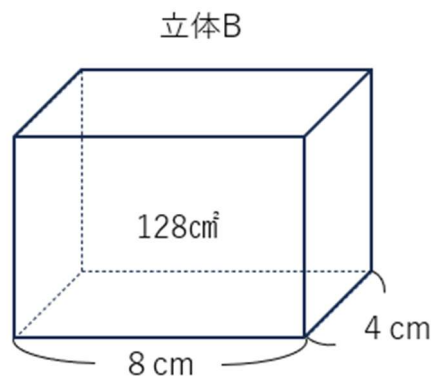
$$x = 64 \times 2$$

$$x = 128$$

立体Bの体積が 128cm^3 と求めることができたね。

問題4

立体Bのような直方体の体積は(底面積) \times (高さ)で求められるね。



(底面積)×(高さ)=(体積)だから

$$4 \times 8 \times (\text{高さ}) = 128$$

$$32 \times (\text{高さ}) = 128$$

$$(\text{高さ}) = 128 \div 32 = 4$$

高さは4cmと求めることができたね。

「相似な立体の表面積の比と体積比」まとめ

相似な立体の相似比と表面積の比

相似な立体の相似比が $a:b$ であれば、
表面積の比は $a^2:b^2$ となる。

相似な立方体の相似比と体積の比

相似な立方体の相似比が $a:b$ であれば、
体積の比は $a^3:b^3$ となる。

