

「相似な図形の面積比」

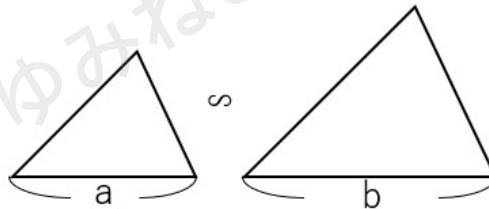
相似な三角形・多角形・円の相似比と面積比

相似な三角形の相似比と面積比を調べてみよう

相似な図形の性質の解説ページでは、三角形の相似比について学習したね。

下の図のような2つの三角形が相似だった場合、対応する辺の比のことを相似比って呼んだよね。

下の図の場合だと $a : b$ が相似比だね。



相似比 $a : b$

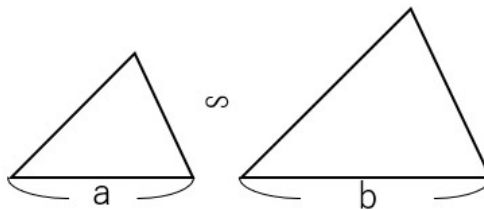
今回は、「相似な三角形」の「面積の比はどうなっているのか？」について考えてみるよ。

まずは結論を伝えてしまうね。

相似な三角形の相似比と面積比の関係は下の通りになっているよ。

相似な三角形の相似比と面積比

相似な三角形の相似比が $a : b$ であれば、
面積の比(面積比)は $a^2 : b^2$ となる。



相似比 $a : b$

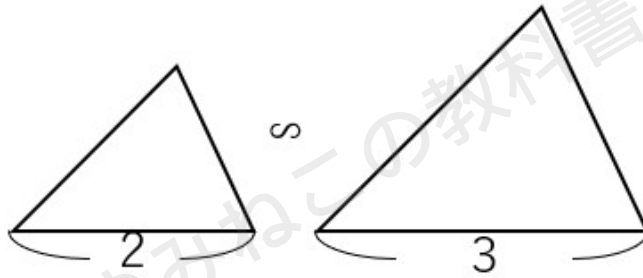
面積比 $a^2 : b^2$



面積比が $a^2:b^2$ になる理由を考える前に、まずは問題を解いてみよう。

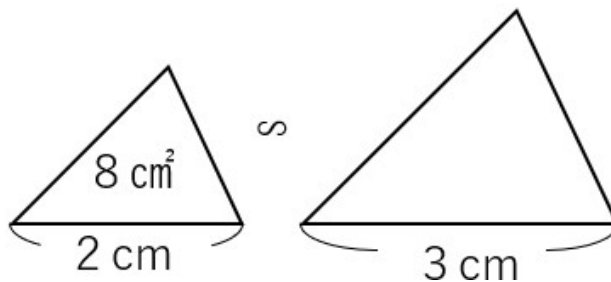
相似な三角形の相似比と面積比の問題

下の2つの三角形は相似で、相似比は2:3になっている。
2つの三角形の面積比を求めなさい。



相似比が $a:b$ のとき、面積比は $a^2:b^2$ になるから、
相似比が2:3のとき、面積比は $2^2:3^2=4:9$ になるよ。

下の2つの三角形は相似で、左側の三角形の面積は 8cm^2 である。
右の三角形の面積を求めなさい。



相似比は2:3だから、面積比は $2^2:3^2=4:9$ になるよね。
右の三角形の面積を $x\text{cm}^2$ とすると、次の比例式が作れるよ。

$$4:9=8:x$$

この比例式を解いて x を求めてみよう。



$$4:9=8:x \quad \text{比例式の性質 } a:b=c:d \text{ ならば、} ad=bc \text{ を使おう}$$

$$4 \times x = 9 \times 8$$

$$4x = 72$$

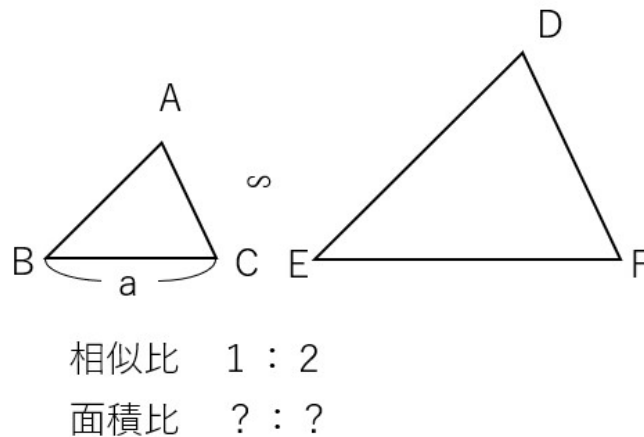
$$x = 18$$

右側の三角形の面積は 18cm^2 と求めることができたね。

なんとなく、面積比の使い方がわかったかな？
 じゃあ、相似比が $a:b$ のとき、なぜ面積比は $a^2:b^2$ になるのか、理由を説明していくね。

相似な三角形の相似比と面積比の関係

次のような、2つの相似な三角形を考えよう。
 2つの三角形の相似比が $1:2$ のとき、面積比「？」がどうなるかをSTEP1～4の順で考えよう。

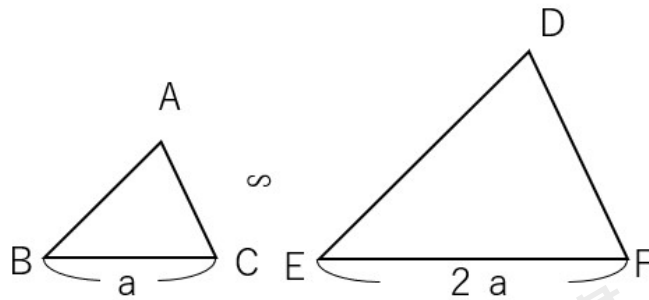


STEP1 底辺の長さを求めよう

相似比が $1:2$ なのだから、 $\triangle ABC$ の長さを2倍すると、 $\triangle DEF$ の長さになるということだね。



ということは、BCの長さが a だとすると、EFの長さは $a \times 2 = 2a$ だよ。

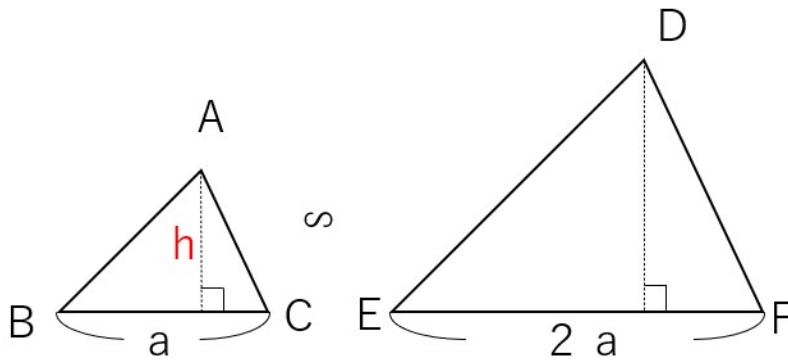


相似比 1 : 2
面積比 ? : ?

STEP2 高さを求めよう。

$\triangle ABC$ の高さを h として考えよう。

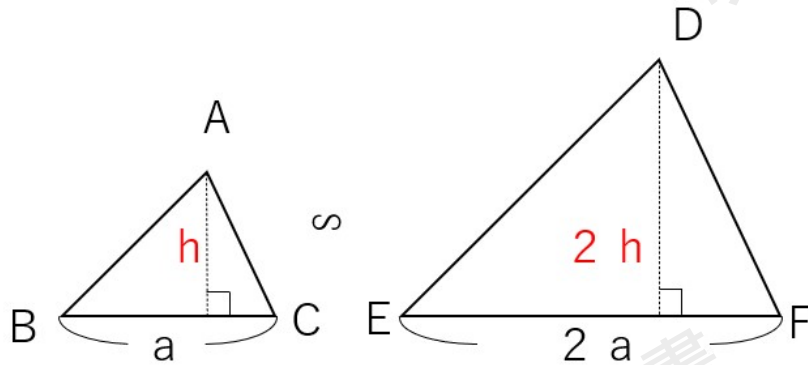
※高さは英語で「height (ハイト)」なので、数学ではアルファベットの「h」を使うことが多いよ。



相似比が1:2なので、 $\triangle ABC$ の高さを2倍したら $\triangle DEF$ の高さになるよね。



だから△DEFの高さは $h \times 2 = 2h$ になるよ。



STEP3 面積を求めよう。

三角形の面積は(底辺)×(高さ)÷2で求まるから

・△ABCの面積 $= a \times h \div 2 = \frac{ah}{2}$

・△DEFの面積 $= 2a \times 2h \div 2 = 2ah$

STEP4 面積比を求めよう。

まとめると

△ABCの面積:△DEFの面積 $= \frac{ah}{2} : 2ah$

もう少し簡単にするために、両方を2倍してみると

△ABCの面積:△DEFの面積

$= \frac{ah}{2} : 2ah$

$= \frac{ah}{2} \times 2 : 2ah \times 2$

$= ah : 4ah$

両方をahで割ってみよう。

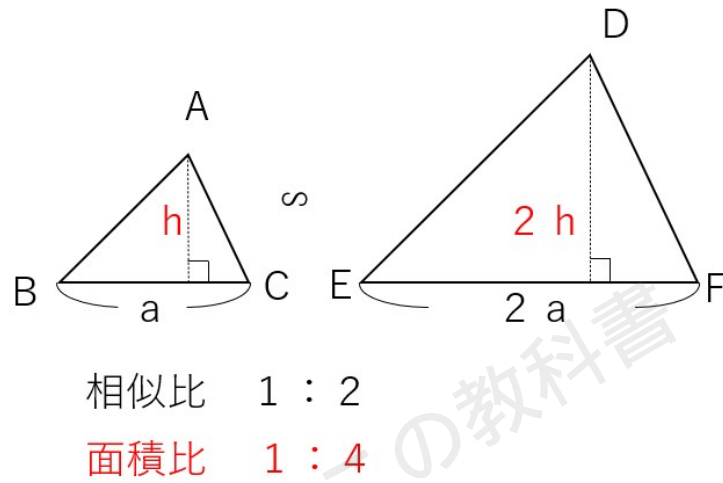
$ah : 4ah$

$= ah \div ah : 4ah \div ah$

$= 1 : 4$



△ABCの面積:△DEFの面積=1:4になることがわかったね。



相似比が1:2だったら、面積比は1:4になることがわかったね。

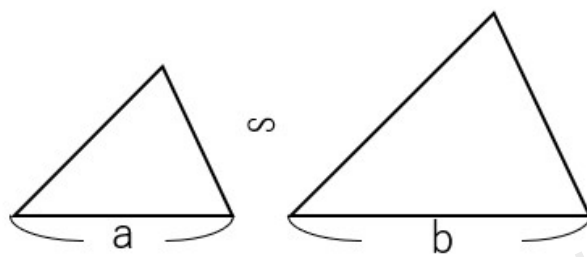
「1:4」は「1²:2²」と表すことができるから、次のとおり説明できるんだ。

相似な三角形の相似比と面積比

相似な三角形の相似比がa:bであれば、

面積の比(面積比)はa²:b²となる

=相似比の二乗が面積比になる



相似比 a : b

面積比 a² : b²



相似な多角形の相似比と面積比を調べてみよう

相似な三角形の相似比と面積比の関係についてわかったよね。

次は、三角形以外の多角形ではどうなるかを調べてみよう。

結論は下の通りで、三角形と全く同じになるよ。

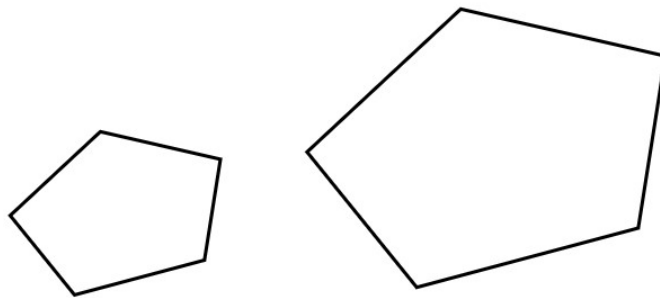
相似な多角形の相似比と面積比

相似な多角形の相似比が $a:b$ であれば、
面積の比(面積比)は $a^2:b^2$ となる。

相似な多角形の相似比と面積比の関係

相似な多角形の相似比が $a:b$ のとき、なぜ面積の比(面積比)は $a^2:b^2$ となるのか、確認していきよ。

多角形の例として、次のような相似な五角形を考えてみよう。



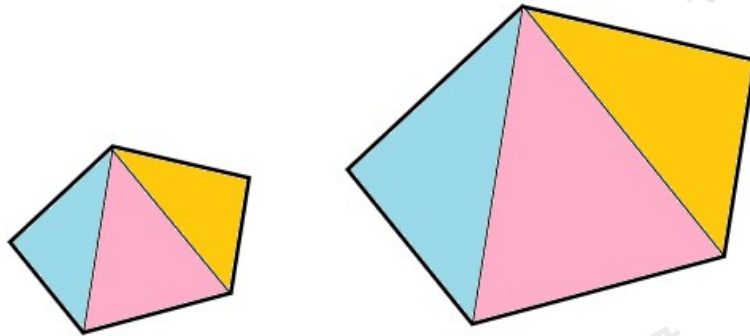
相似比 1 : 2

面積比 ? : ?

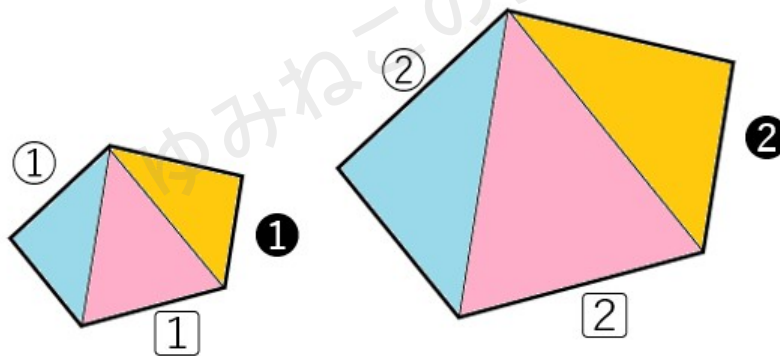
さっき「三角形の相似比と面積比」を確認したので、五角形を次のように三角形にわけて考えてみよう。



2つの五角形は相似だから、同じ色の三角形同士も相似になるよ。



2つの五角形の相似比は1:2ということは、すべての辺の比が1:2になっているということだよ。



相似比 1 : 2

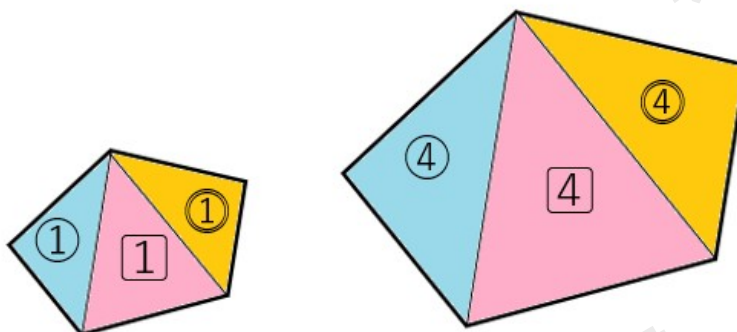
ここで、さっき確認した「相似な三角形の相似比と面積比」の性質を使おう。

相似な三角形の相似比と面積比

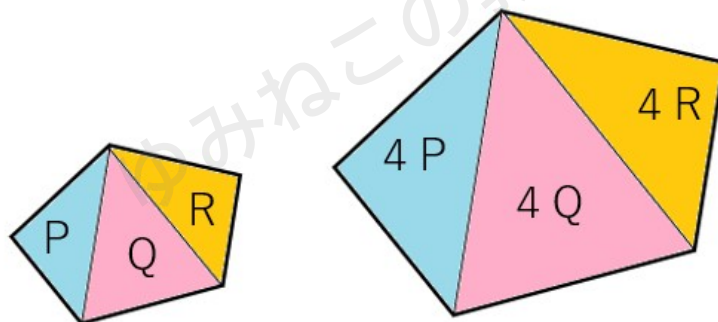
相似な三角形の相似比が $a:b$ であれば、
面積の比(面積比)は $a^2:b^2$ となる
=相似比の二乗が面積比になる



五角形の中にある三角形の相似比は1:2だから、面積比は1:4になるよね。



左の三角形の面積をP、Q、Rとしたら、右の三角形の面積は $P \times 4 = 4P$ 、 $Q \times 4 = 4Q$ 、 $R \times 4 = 4R$ になるよね。

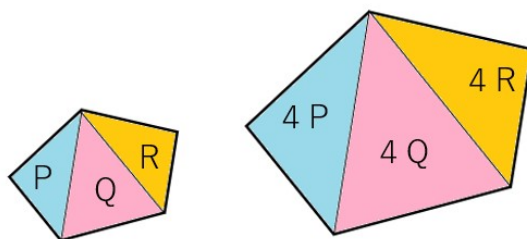


- ・左の五角形の面積 = $P + Q + R$
- ・右の五角形の面積 = $4P + 4Q + 4R$

ということは、左側の五角形の面積の4倍が右の五角形の面積になっているってことだよ。

※ $4P + 4Q + 4R = 4(P + Q + R)$ だよ。

つまり、五角形の面積比は1:4になるんだ。



相似比 1 : 2

面積比 1 : 4



相似比が1:2であれば、面積比が1:4になることがわかったね。
「1:4」は「 $1^2:2^2$ 」と表すことができるから、次のことが説明できるね。

相似な多角形の相似比と面積比

相似な多角形の相似比が $a:b$ であれば、
面積の比(面積比)は $a^2:b^2$ となる。

三角形だけではなくて、多角形でも「相似比の二乗が面積比」になっているんだね。

相似な平面図形の周と面積の定理

今までわかったことは次の通りだよ。

今まで学習したこと

- ・相似な三角形の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。
- ・相似な多角形の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。

今までは「〇〇角形」という角がある図形の面積比を考えてきたね。
では、最後に円の相似比と面積比の関係について考えていこう。

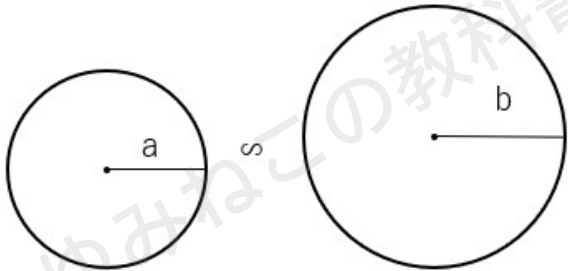


相似な円の相似比と面積比の関係

結論からいうと、円の相似比と面積比の関係は次のようになるよ。

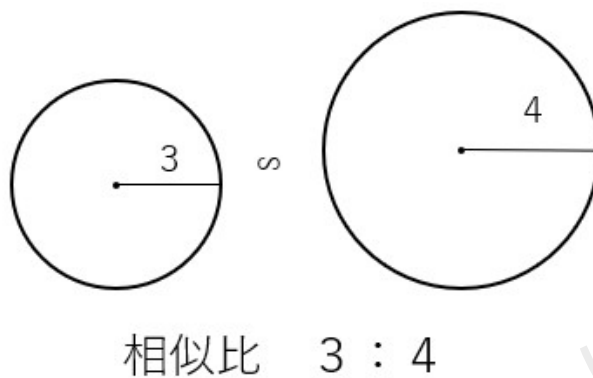
円の相似比と面積比の関係

相似な円の相似比が $a:b$ であれば、
面積比は $a^2:b^2$ となる。



相似比 $a : b$
面積比 $a^2 : b^2$

なぜ、面積比は $a^2:b^2$ になるのかを次の円で考えて確かめてみよう。



円の面積は(半径) \times (半径) \times (円周率)で求まるから

- ・左の円の面積 $=3\times 3\times \pi=9\pi$
- ・右の円の面積 $=4\times 4\times \pi=16\pi$



まとめると

左の円の面積:右の円の面積= $9\pi:16\pi$

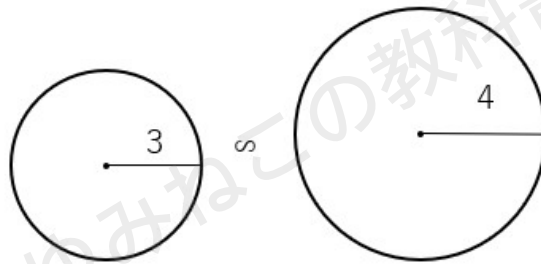
もう少し簡単にするために、両方を π でわってみると

左の円の面積:右の円の面積

= $9\pi:16\pi$

= $9\pi\div\pi:16\pi\div\pi$

= $9:16$



相似比 $3:4$

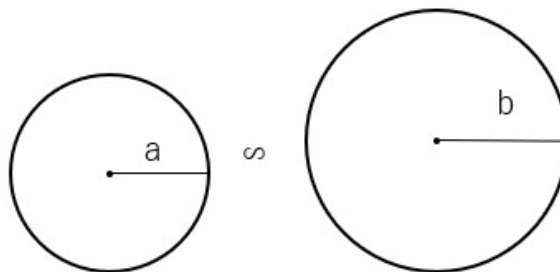
面積比 $9:16$

相似比が $3:4$ だったら、面積比が $9:16$ になることがわかったね。

「 $9:16$ 」は「 $3^2:4^2$ 」と表すことができるから、次のことが説明できるね。

円の相似比と面積比の関係

相似な円の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。



相似比 $a:b$

面積比 $a^2:b^2$

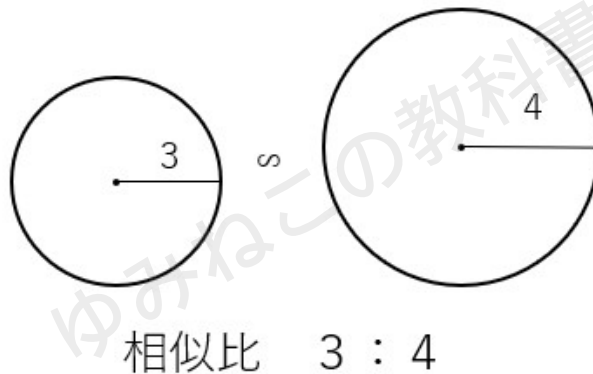


円の場合も、相似比の二乗が面積比になることがわかったね。

では、円つながりで、今度は相似比と周の長さの関係についても調べてみよう。

相似な円の相似比と周の長さの関係

次の2つの相似な円の周の長さを求めよう。



円の周の長さは、(直径)×(円周率)で求まるから

- ・左の円の円周 $=6 \times \pi = 6\pi$
- ・右の円の円周 $=8 \times \pi = 8\pi$

まとめると

$$\text{左の円の円周} : \text{右の円の円周} = 6\pi : 8\pi$$

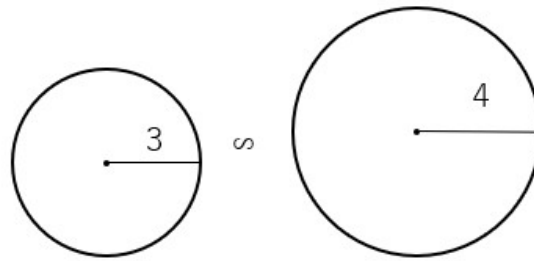
もう少し簡単にするために、両方を π でわってみると

$$\begin{aligned} \text{左の円の円周} : \text{右の円の円周} \\ &= 6\pi : 8\pi \\ &= 6\pi \div \pi : 8\pi \div \pi \\ &= 6 : 8 \end{aligned}$$

両方とも2で割って、左の円の円周:右の円の円周 $=3:4$ と求めることができたね。



相似比が3:4の場合、円周の比も同じになるよ。



相似比 3 : 4

円周の比 3 : 4

円周の場合は、その比は相似比と同じになるんだね!

相似な平面図形の周と面積の定理

今まで学習してきたことは次の通り。

今まで学習したこと

- ・相似な三角形の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。
- ・相似な多角形の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。
- ・相似な円の相似比が $a:b$ であれば、面積比は $a^2:b^2$ となる。
- ・相似な円の相似比が $a:b$ であれば、周の比も $a:b$ となる。

三角形でも多角形でも円でも、相似比の二乗が面積比になっているから、どんな平面図形でも、相似比の二乗が面積比になることがわかるね。

それと、周の比は相似比と同じになるってことが導けたね。



まとめると次のようになるよ。これはとても大切な知識だからしっかり覚えておこう。

相似な平面図形の周と面積の定理

- ・相似な平面図形では、周の比は相似比と同じになる
相似比 $a:b$ なら周の比も $a:b$
- ・相似な平面図形では、面積比は相似比の二乗になる
相似比が $a:b$ なら面積比は $a^2:b^2$

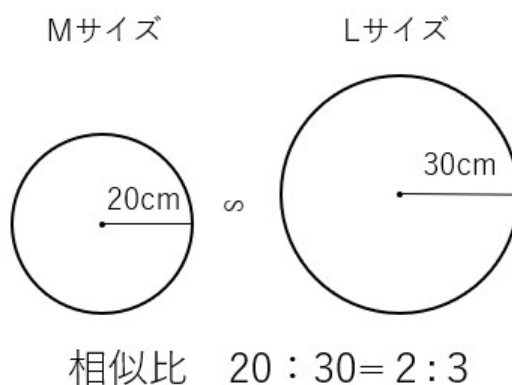
相似な図形の面積比の定理を使った問題

問題

全く同じ形のピザで

- ・Mサイズ(20cm)で1500円のピザ
 - ・Lサイズ(30cm)で3000円のピザ
- がありました。どちらがお得でしょうか？

2つのピザは全く同じ形ということは、「相似」だよね。相似比は半径の比だから、 $20:30=2:3$ になるよ。



平面図形の面積比は、相似比の二乗になるから

2つのピザの面積比は $2^2:3^2=4:9$ だね。

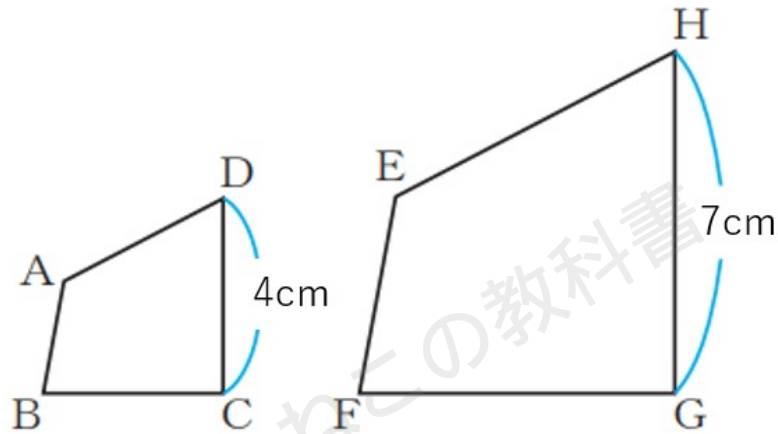
4:9ってことは、

Lサイズの面積(9)はMサイズの面積(4)の2倍以上あるから、Lサイズの方がお得ということがわかるよ。



問題

下の図で、四角形ABCDの四角形EFGHである。



- (1) 四角形ABCDの周の長さが16cmだったとき、四角形EFGHの周の長さを求めよ。
- (2) 四角形ABCDの面積が16cm²だったとき、四角形EFGHの面積を求めよ。

(1)

相似比は4:7だから、周の長さの比も4:7になるよね。

今回求めたい四角形EFGHの周の長さをxcmとすると次の比例式が成り立つよ。

$$4:7=16:x$$

$$4x=7\times 16$$

$$4x=112$$

$$x=28$$

四角形EFGHの周の長さが28cmと求まったね。

(2)

相似比は4:7だから、面積比は4²:7²=16:49になるよね。



今回求めたい四角形EFGHの面積を $x\text{cm}^2$ とすると次の比例式が成り立つよ。

$$16:49=16:x$$

$$16x=49\times 16$$

両辺16で割ると、計算が簡単にできるよ。

$$16x=49\times 16$$

$$16x\div 16=49\times 16\div 16$$

$$x=49$$

四角形EFGHの面積が 49cm^2 と求まったね。

「相似な図形の面積比」まとめ

相似な平面図形の周と面積の定理

- ・相似な平面図形では、周の比は相似比と同じになる
相似比 $a:b$ なら周の比も $a:b$
- ・相似な平面図形では、面積比は相似比の二乗になる
相似比が $a:b$ なら面積比は $a^2:b^2$

