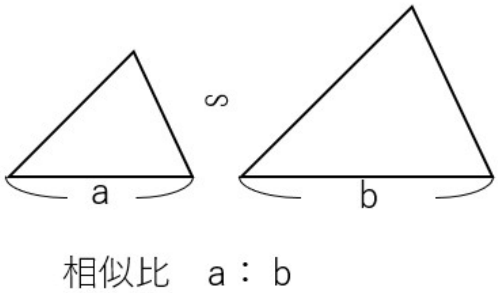
「相似な図形の面積比」
相似な三角形・多角形・円の相似比と面積比

相似な三角形の相似比と面積比を調べてみよう

相似な図形の性質の解説ページでは、三角形の相似比について学習したね。
下の図のような２つの三角形が相似だった場合、対応する辺の比のことを相似比って呼んだよね。

下の図の場合だとａ：ｂが相似比だね。

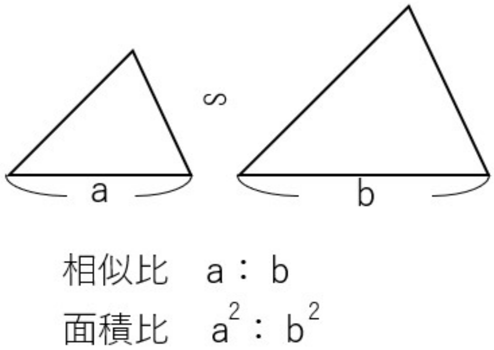


今回は、「相似な三角形」の「面積の比はどうなっているのか？」について考えてみるよ。

まずは結論を伝えてしまうね。
相似な三角形の相似比と面積比の関係は下の通りになっているよ。

相似な三角形の相似比と面積比

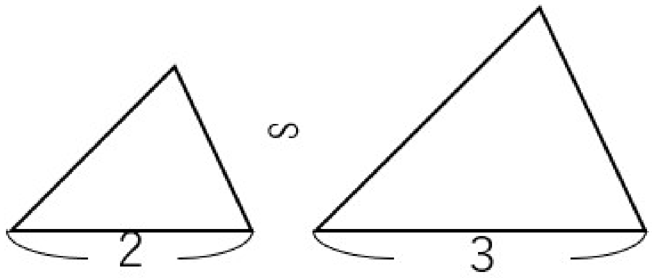
相似な三角形の相似比がa:bであれば、
面積の比（面積比）は$a^2:b^2$となる。



面積比がa^2:b^2になる理由を考える前に、まずは問題を解いてみよう。

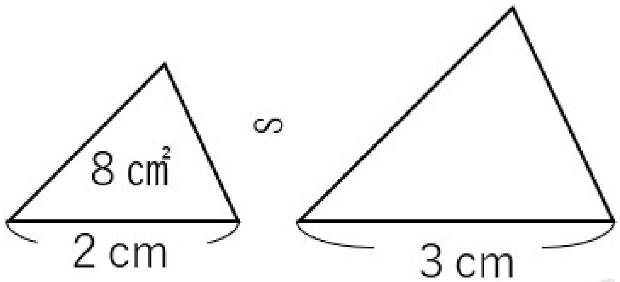
相似な三角形の相似比と面積比の問題

下の2つの三角形は相似で、相似比は2:3になっている。
2つの三角形の面積比を求めなさい。



相似比がa:bのとき、面積比はa^2:b^2になるから、
相似比が2:3のとき、面積比は2^2:3^2=4:9になるよ。

下の2つの三角形は相似で、左側の三角形の面積は8cm2である。
右の三角形の面積を求めなさい。



相似比は2:3だから、面積比は2^2:3^2=4:9になるよね。
右の三角形の面積を$x$cm^{2}とすると、次の比例式が作れるよ。

4:9=8:x

この比例式を解いてxを求めてみよう。

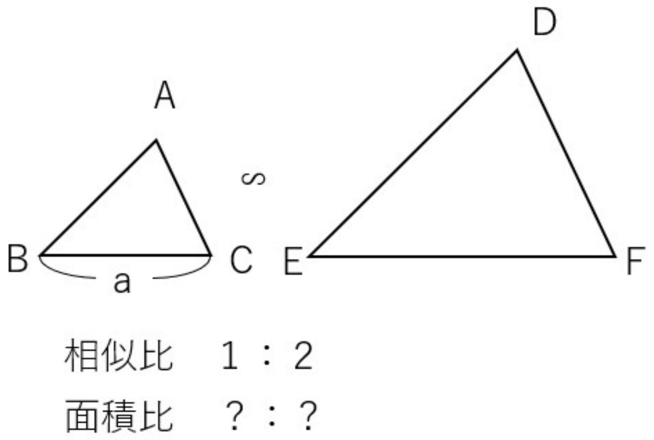
4:9=8:x　比例式の性質a:b=c:dならば、ad=bcを使おう
4×x=9×8
4x=72
x=18

右側の三角形の面積は18cm^{2}と求めることができたね。

なんとなく、面積比の使い方がわかったかな？
じゃあ、相似比がa:bのとき、なぜ面積比はa^2:b^2になるのか、理由を説明していくね。

相似な三角形の相似比と面積比の関係

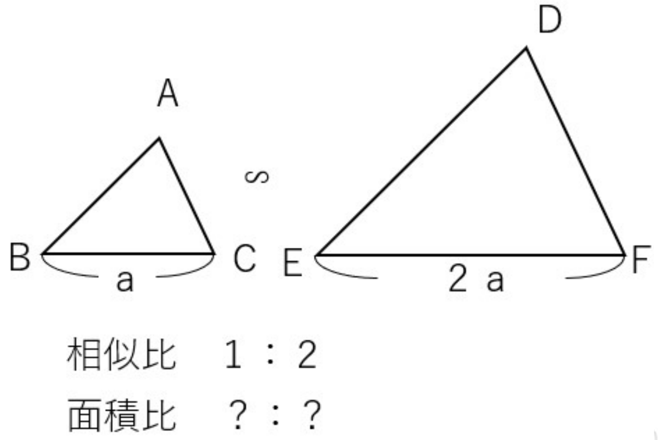
次のような、2つの相似な三角形を考えよう。
2つの三角形の相似比が1:2のとき、面積比「?」がどうなるかをSTEP1～4の順で考えよう。



STEP1　底辺の長さを求めよう

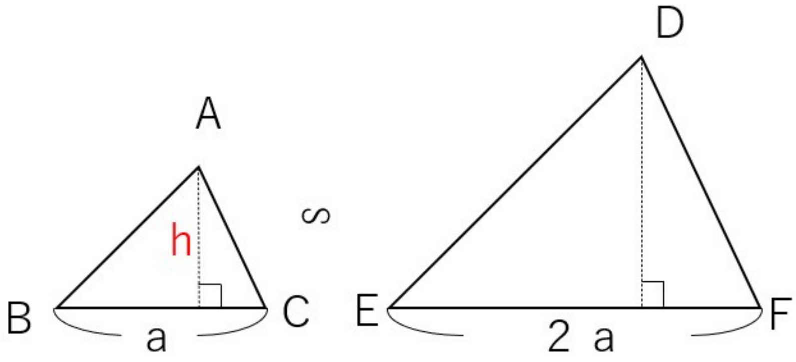
相似比が1:2なのだから、△ABCの長さを2倍すると、△DEFの長さになるということだね。

ということは、BCの長さがaだとすると、EFの長さはa×2＝2aだよね。



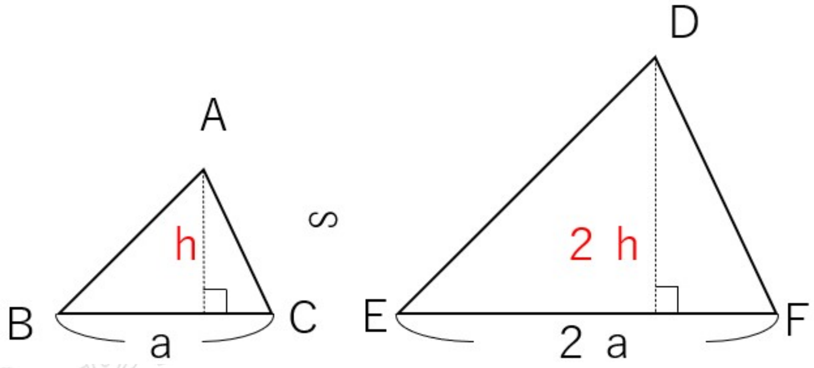
STEP2 高さを求めよう。

△ABCの高さをhとして考えよう。
※高さは英語で「height（ハイト）」なので、数学ではアルファベットの「h」を使うことが多いよ。



相似比が1：2なので、△ABCの高さを2倍したら△DEFの高さになるよね。

だから△DEFの高さはh×2=2hになるよ。



STEP3 面積を求めよう。

三角形の面積は(底辺)×(高さ)÷2で求まるから

・△ABCの面積=a×h÷2=$\frac{ah}{2}$

・△DEFの面積=2a×2h÷2=2ah

STEP4 面積比を求めよう。

まとめると

△ABCの面積:△DEFの面積=$\frac{ah}{2}$:2ah

もう少し簡単にするために、両方を2倍してみると

△ABCの面積:△DEFの面積

=$\frac{ah}{2}$:2ah

=$\frac{ah}{2}$×2:2ah×2

=ah:4ah

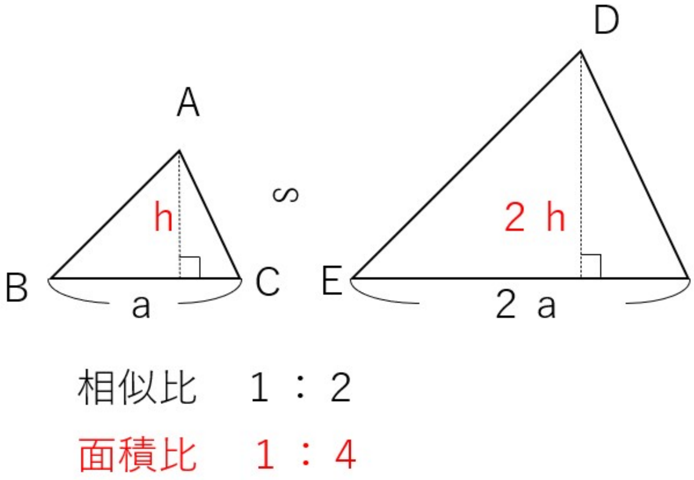
両方をahで割ってみよう。

ah:4ah

=ah÷ah:4ah÷ah

=1:4

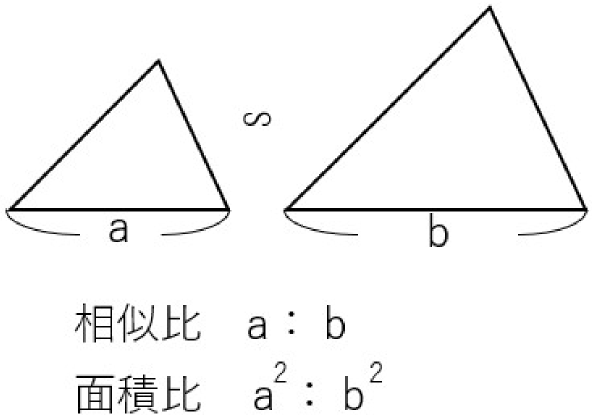
△ABCの面積:△DEFの面積=1:4になることがわかったね。



相似比が1:2だったら、面積比は1:4になることがわかったね。
「1:4」は「1^2:2^2」と表すことができるから、次のとおり説明できるんだ。

相似な三角形の相似比と面積比

相似な三角形の相似比がa:bであれば、
面積の比(面積比)はa^2:b^2となる
=相似比の二乗が面積比になる



相似な多角形の相似比と面積比を調べてみよう

相似な三角形の相似比と面積比の関係についてわかったよね。

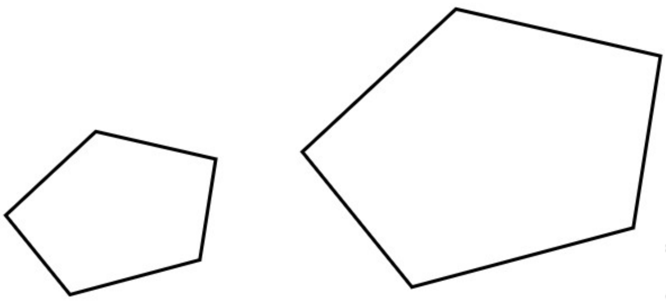
次は、三角形以外の多角形ではどうなるかを調べてみよう。
結論は下の通りで、三角形と全く同じになるよ。

> 相似な多角形の相似比と面積比
>
> 相似な多角形の相似比がa:bであれば、
> 面積の比（面積比）はa^2:b^2となる。

相似な多角形の相似比と面積比の関係

相似な多角形の相似比がa:bのとき、なぜ面積の比（面積比）はa^2:b^2となるのか、確認していくよ。

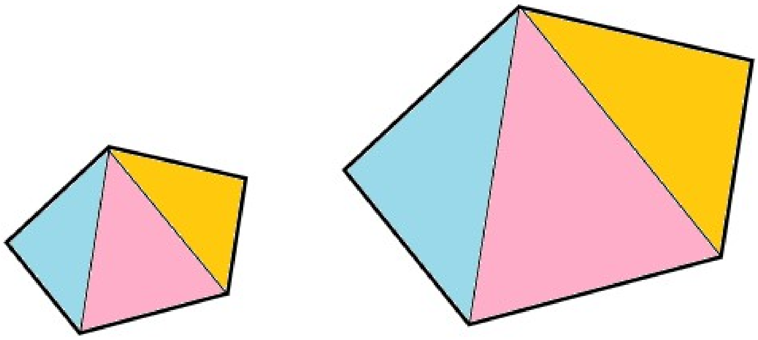
多角形の例として、次のような相似な五角形を考えてみよう。



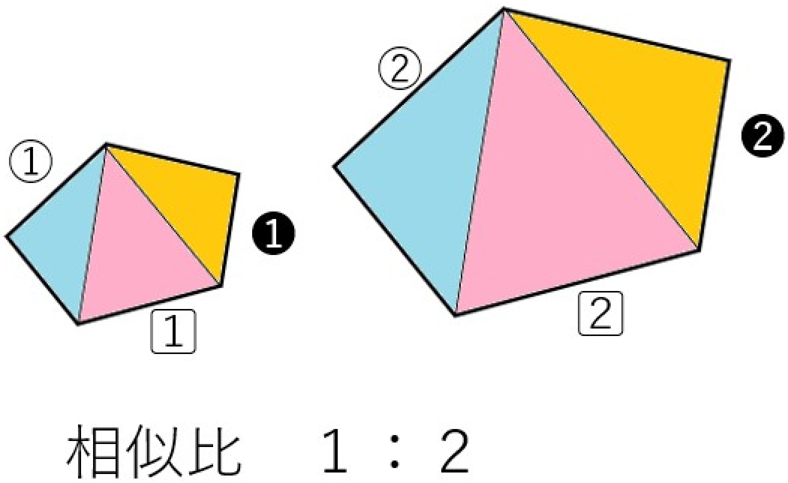
相似比　1 : 2
面積比　? : ?

さっき「三角形の相似比と面積比」を確認したので、五角形を次のように三角形にわけて考えてみよう。

2つの五角形は相似だから、同じ色の三角形同士も相似になるよ。



2つの五角形の相似比は1:2ということは、すべての辺の比が1:2になっているということだよね。

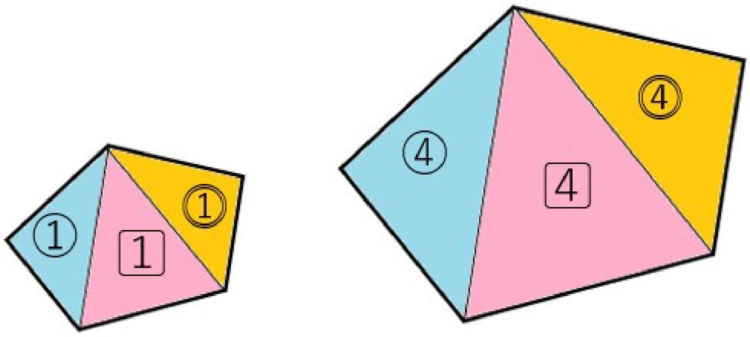


ここで、さっき確認した「相似な三角形の相似比と面積比」の性質を使おう。

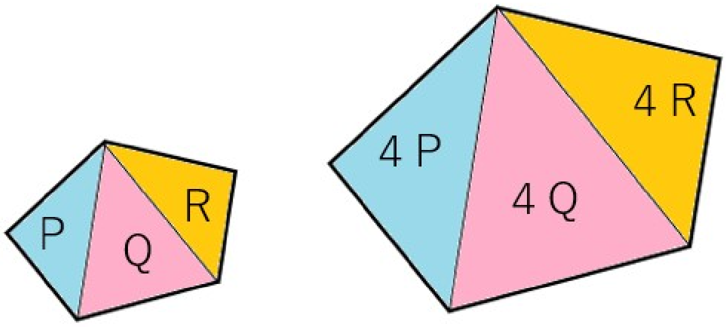
相似な三角形の相似比と面積比

相似な三角形の相似比がa:bであれば、
面積の比（面積比）はa^2:b^2となる
＝相似比の二乗が面積比になる

五角形の中にある三角形の相似比は1:2だから、面積比は1:4になるよね。



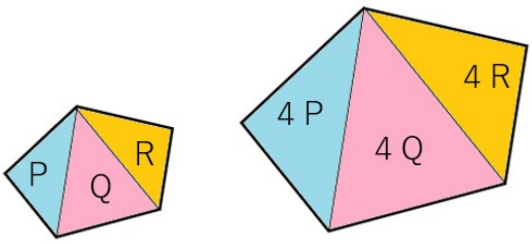
左の三角形の面積をP、Q、Rとしたら、右の三角形の面積はP×4=4P、Q×4=4Q、R×4=4Rになるよね。



・左の五角形の面積=P+Q+R
・右の五角形の面積=4P+4Q+4R

ということは、左側の五角形の面積の4倍が右の五角形の面積になっているってことだよね。
※4P+4Q+4R=4(P+Q+R)だよね

つまり、五角形の面積比は1:4になるんだ。



相似比　1 : 2
面積比　1 : 4

相似比が1:2であれば、面積比が1:4になることがわかったね。
「1:4」は「$1^2:2^2$」と表すことができるから、次のことが説明できるね。

相似な多角形の相似比と面積比

相似な多角形の相似比が$a:b$であれば、
面積の比（面積比）は$a^2:b^2$となる。

三角形だけではなくて、多角形でも「相似比の二乗が面積比」になっているんだね。

相似な平面図形の周と面積の定理

今までわかったことは次の通りだよ。

今まで学習したこと

・相似な三角形の相似比が$a:b$であれば、面積比は$a^2:b^2$となる。
・相似な多角形の相似比が$a:b$であれば、面積比は$a^2:b^2$となる。

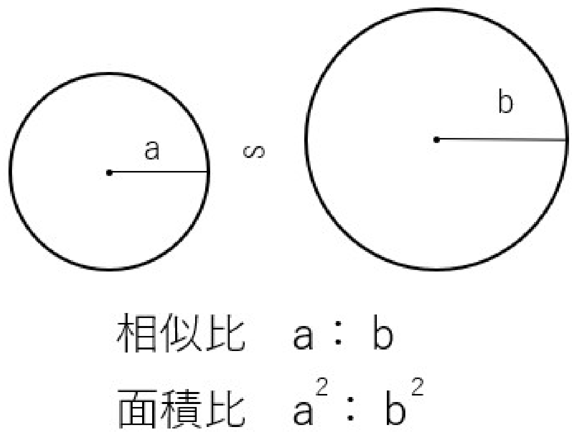
今までは「〇〇角形」という角がある図形の面積比を考えてきたね。
では、最後に円の相似比と面積比の関係について考えていこう。

相似な円の相似比と面積比の関係

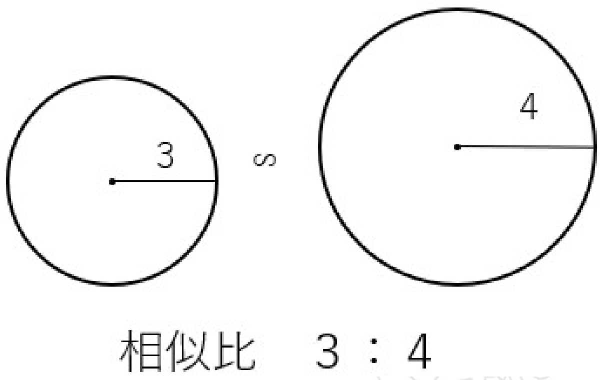
結論からいうと、円の相似比と面積比の関係は次のようになるよ。

円の相似比と面積比の関係

相似な円の相似比が$a:b$であれば、
面積比は$a^2:b^2$となる。



なぜ、面積比は$a^2:b^2$になるのかを次の円で考えて確かめてみよう。



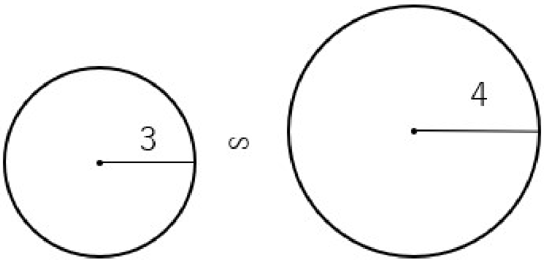
円の面積は（半径）×（半径）×（円周率）で求まるから

・左の円の面積＝$3\times3\times\pi=9\pi$
・右の円の面積＝$4\times4\times\pi=16\pi$

まとめると
左の円の面積：右の円の面積＝9π：16π

もう少し簡単にするために、両方をπでわってみると

左の円の面積：右の円の面積
＝9π：16π
＝9π÷π：16π÷π
＝9：16

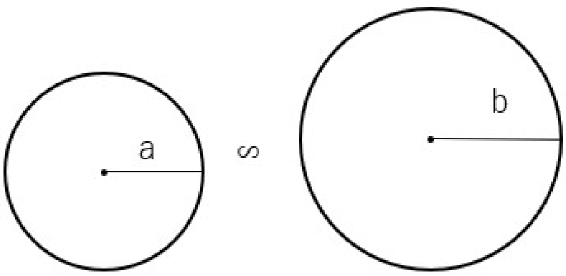


相似比　3：4
面積比　9：16

相似比が3：4だったら、面積比が9：16になることがわかったね。
「9：16」は「3^2：4^2」と表すことができるから、次のことが説明できるね。

円の相似比と面積比の関係

相似な円の相似比がa：bであれば、面積比はa^2：b^2となる。



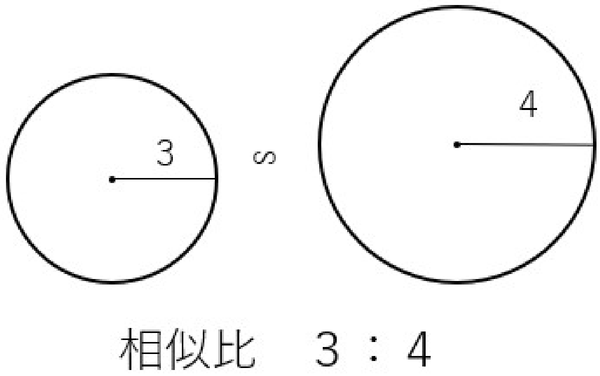
相似比　a：b
面積比　a^2：b^2

円の場合も、相似比の二乗が面積比になることがわかったね。

では、円つながりで、今度は相似比と周の長さの関係についても調べてみよう。

相似な円の相似比と周の長さの関係

次の2つの相似な円の周の長さを求めよう。



円の周の長さは、（直径）×（円周率）で求まるから

・左の円の円周＝6×π＝6π
・右の円の円周＝8×π＝8π

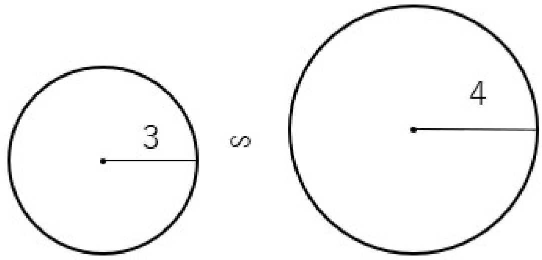
まとめると
左の円の円周：右の円の円周＝6π：8π

もう少し簡単にするために、両方をπでわってみると

左の円の円周：右の円の円周
＝6π：8π
＝6π÷π：8π÷π
＝6：8

両方とも2で割って、左の円の円周：右の円の円周＝3：4と求めることができたね。

相似比が3:4の場合、円周の比も同じになるよ。



相似比　3 : 4

円周の比　3 : 4

円周の場合は、その比は相似比と同じになるんだね!

相似な平面図形の周と面積の定理

今まで学習してきたことは次の通り。

> 今まで学習したこと
>
> ・相似な三角形の相似比が$a:b$であれば、面積比は$a^2:b^2$となる。
> ・相似な多角形の相似比が$a:b$であれば、面積比は$a^2:b^2$となる。
> ・相似な円の相似比が$a:b$であれば、面積比は$a^2:b^2$となる。
> ・相似な円の相似比が$a:b$であれば、周の比も$a:b$となる。

三角形でも多角形でも円でも、相似比の二乗が面積比になっているから、どんな平面図形でも、相似比の二乗が面積比になることがわかるね。

それと、周の比は相似比と同じになるってことが導けたね。

まとめると次のようになるよ。これはとても大切な知識だからしっかり覚えておこう。

相似な平面図形の周と面積の定理

・相似な平面図形では、周の比は相似比と同じになる
相似比a:bなら周の比もa:b

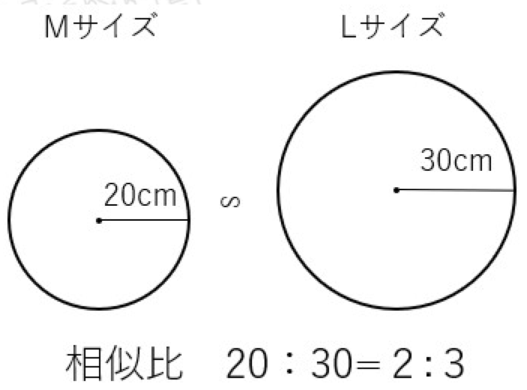
・相似な平面図形では、面積比は相似比の二乗になる
相似比がa:bなら面積比は$a^2:b^2$

相似な図形の面積比の定理を使った問題

問題

全く同じ形のピザで
・Mサイズ（20cm）で1500円のピザ
・Lサイズ（30cm）で3000円のピザ
がありました。どちらがお得でしょうか？

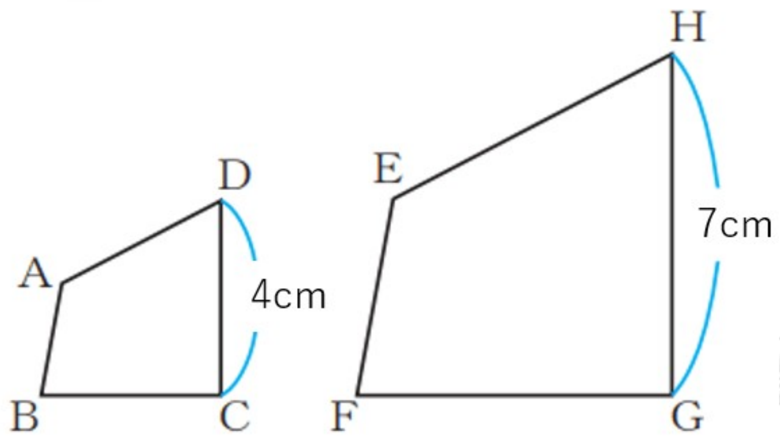
2つのピザは全く同じ形ということは、「相似」だよね。相似比は半径の比だから、20:30=2:3になるよ。



平面図形の面積比は、相似比の二乗になるから
2つのピザの面積比は$2^2:3^2$=4:9だね。
4:9ってことは、
Lサイズの面積（9）はMサイズの面積（4）の2倍以上あるから、Lサイズの方がお得ということがわかるよ。

問題

下の図で、四角形ABCD∽四角形EFGHである。



(1) 四角形ABCDの周の長さが16cmだったとき、四角形EFGHの周の長さを求めよ。

(2) 四角形ABCDの面積が16cm^{2}だったとき、四角形EFGHの面積を求めよ。

(1)

相似比は4:7だから、周の長さの比も4:7になるよね。

今回求めたい四角形EFGHの周の長さをxcmとすると次の比例式が成り立つよ。

4:7=16:x
4x=7×16
4x=112
x=28

四角形EFGHの周の長さが28cmと求まったね。

(2)

相似比は4:7だから、面積比は$4^2:7^2$=16:49になるよね。

今回求めたい四角形EFGHの面積をxcm2とすると次の比例式が成り立つよ。

16:49=16:x
16x=49×16

両辺16で割ると、計算が簡単にできるよ。

16x=49×16
16x÷16=49×16÷16
x=49

四角形EFGHの面積が49cm^{2}と求まったね。

「相似な図形の面積比」まとめ

相似な平面図形の周と面積の定理

・相似な平面図形では、周の比は相似比と同じになる
　相似比a:bなら周の比もa:b

・相似な平面図形では、面積比は相似比の二乗になる
　相似比がa:bなら面積比はa^2:b^2