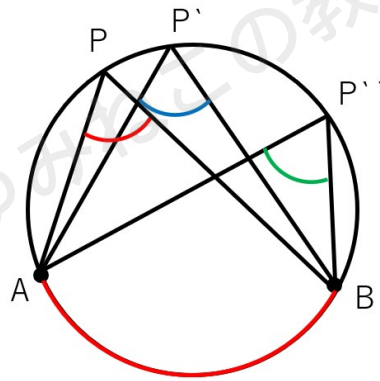


「円周角と弧の定理」「直径と円周角の定理」を わかりやすく解説

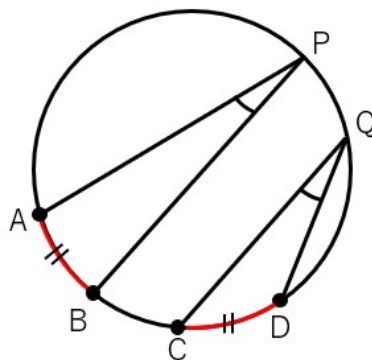
円周角と弧の関係を調べてみよう

前回「1つの弧に対する円周角の大きさは一定である」という円周角の定理を学習したね。



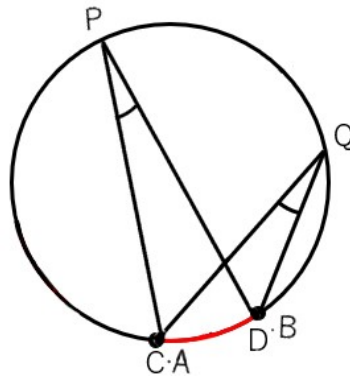
前は「弧AB」だけに注目して見ればよかったよね。

今回は、弧ABとは別のところにある弧だけれど、弧ABと等しい弧について考えよう。



この図でイメージして欲しいのだけれど、「等しい弧」というわけなので、弧ABの部分ぐるっと円に沿ってスライドさせれば、弧CDとピッタリ重なるというわけだよね。





ということは、前回学習した「1つの弧に対する円周角」と同じ条件になるということだね。だから。別の等しい弧に対する円周角の大きさは変わらないんだよ。今回の図だと、 $\angle P = \angle Q$ ってことだね。

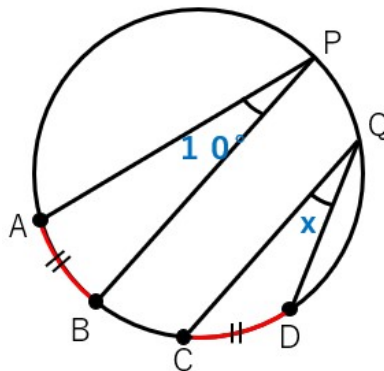
円周角と弧の関係のポイント

等しい弧に対する円周角の大きさは変わらない

それでは、練習問題にチャレンジしてみよう。

円周角と弧の関係を使った練習問題

下の図で、 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ である。
xの角度を求めなさい。

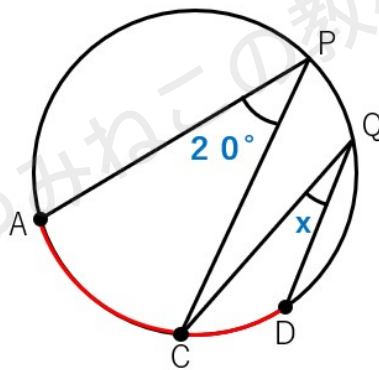


$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ だから、

- ・ \widehat{AB} に対する円周角 $\angle P$
 - ・ \widehat{CD} に対する円周角 $\angle Q$
- は等しくなるよね。

だから、 $x = 10^\circ$ と求めることができるね。

下の図で、 $\widehat{AC} = 2\widehat{CD}$ になっている。 x の角度を求めなさい。



この問題では、弧ABと弧CDは等しくはないので、今度はすこし様子が違うね。
でも難しく考えることはないよ。
弧の長さが2倍になっているなら、円周角も2倍になるというだけのことなんだ。

2倍すると 20° になるのだから、 $x = 10^\circ$ が答えになるよ。

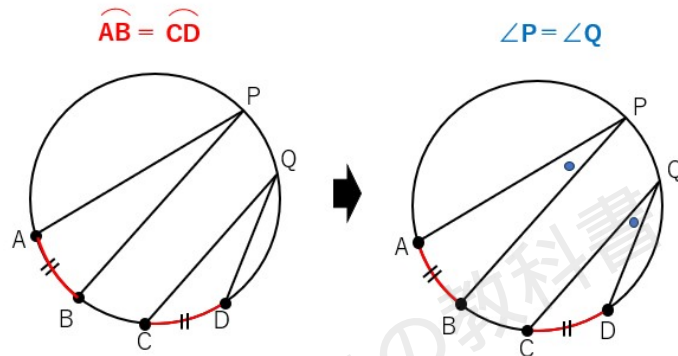
円周角と弧の定理

「弧の長さが等しければ、円周角も等しくなる」という円周角と弧の関係がわかったね。
この関係のことを「円周角と弧の定理」というよ。

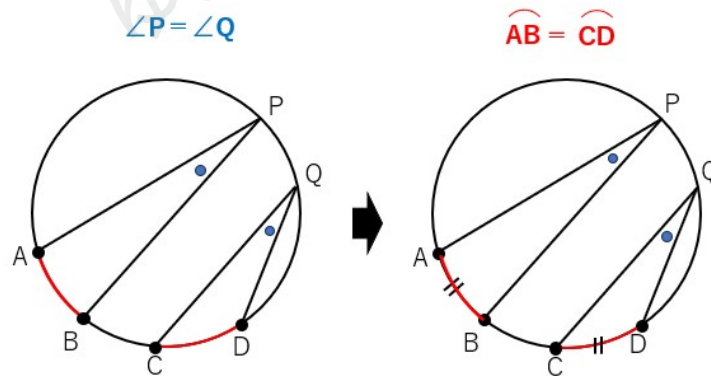


円周角と弧の定理

1つの円で弧の長さが等しいとき、それに対する円周角も等しい



逆に、円周角が等しいとき、それに対する弧の長さも等しい



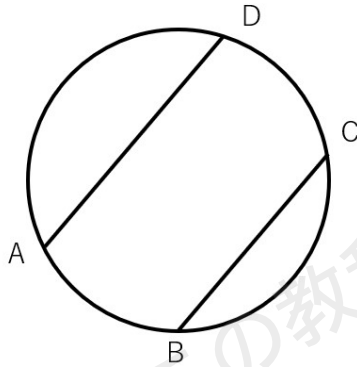
「弧の長さが等しい時、それに対する円周角も等しくなる問題」はさっきやったよね。

だから、逆の「円周角が等しい時、それに対する弧の長さも等しい」という性質を使った問題に挑戦してみよう。



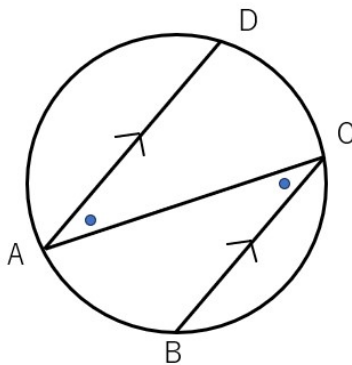
円周角と弧の定理を使った練習問題

下の図で、平行な弦AD、弦BCにはさまれた \widehat{AB} と \widehat{CD} の長さが等しくなることを証明しなさい。



まずACを結ぼう。

弦ADと弦BCは平行だから、錯角が等しくなって、 $\angle A = \angle C$ になるよね。



ここからが重要なポイントだよ。

- ・ $\angle C$ は \widehat{AB} に対する円周角
 - ・ $\angle A$ は \widehat{CD} に対する円周角
- だよ。

$\angle A$ と $\angle C$ の角度は等しいから、「円周角が等しいとき、それに対する弧の長さも等しい」という性質を使うと、

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

となることがわかるね。



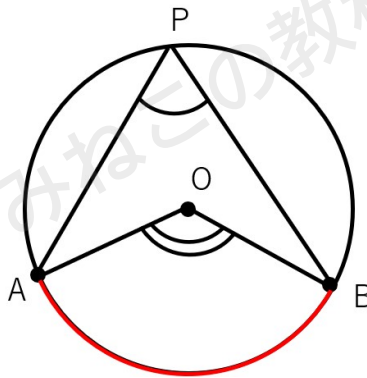
直径と円周角の定理

以前に円周角と中心角について学習したよね。ちょっと復習してみよう。

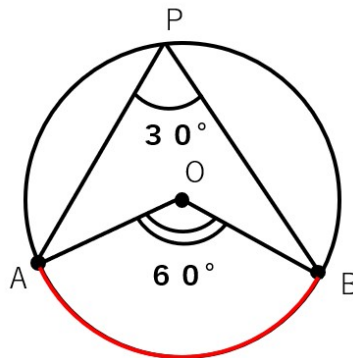
円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分である。

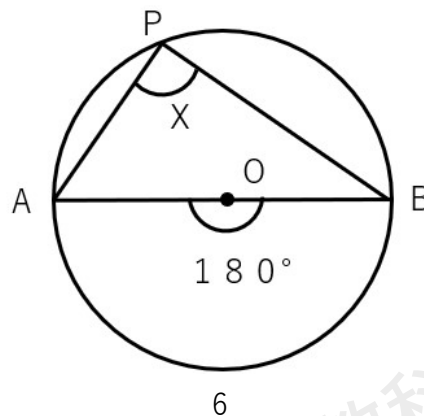
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



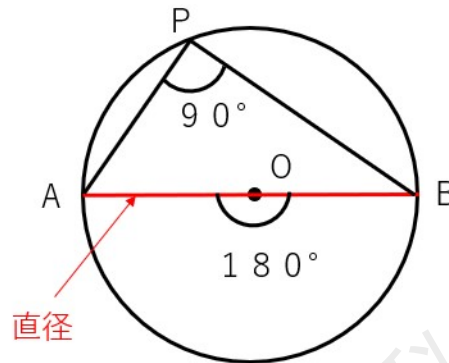
例えば、 $\angle AOB$ が 60° だったら $\angle APB$ は 30° になるってことだったよね。



では、もし中心角が 180° だったら円周角は何度になるか考えよう。



同じ弧に対する中心角の半分が円周角になるから、
円周角は $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ と求まるね。

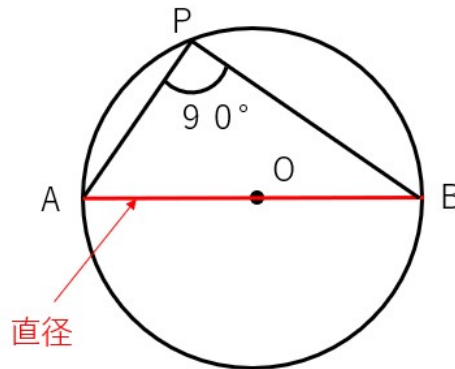


ここで気づいてほしいんだけど、中心角が 180° になるときって、直径しかありえないよね。

中心角が 180° になったら、円周角は 90° になるから、次の関係が成り立つんだ。

直径と円周角の定理

線分ABを直径とする円の円周上に点Pを取ると、 $\angle APB = 90^\circ$ になる

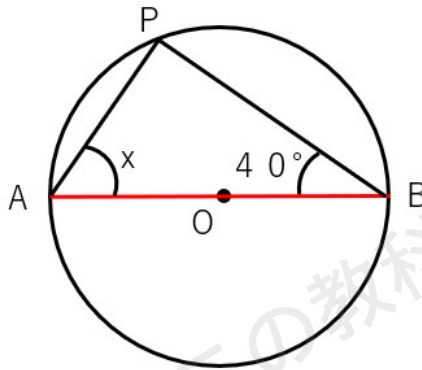


この関係を使って問題を解いてみよう。



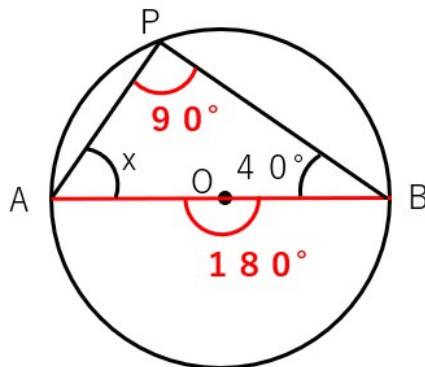
直径と円周角の定理を使った練習問題

次の図で、線分ABが円Oの直径であるとき、xの角度を求めなさい。



直径と円周角の関係を使うと、線分ABは直径だから中心角は 180° になるよね。

このときの円周角 $\angle P$ は $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ になるよね。



$\triangle ABP$ に注目すると、内角の和が 180° になるから、残ったxは 50° とわかるね。



直径と円周角の定理の逆

直径と円周角の定理には逆が存在するんだ。

直径と円周角の定理の逆

$\angle APB = 90^\circ$ ならば、線分ABは円Oの直径になる

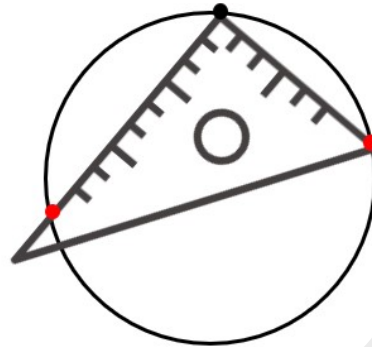
この定理は円の中心を三角定規を使って求めるときに役立つよ。

次のような円があるとき「円の中心」を三角定規を使って求めなさい。

コンパスを使って中心を求める方法は1年生の時に学習したよね。
3年生になると三角定規だけで円の中心を求めるようになるんだよ。



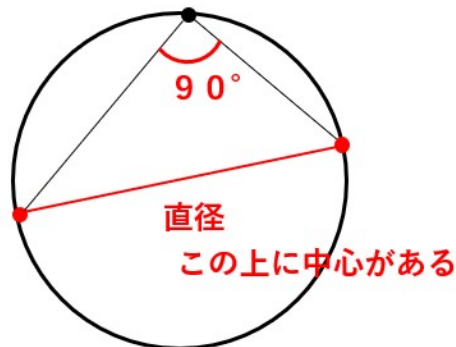
STEP1 三角定規の直角部分が円周に重なるように置いて、円周と交わる点を2つ取る



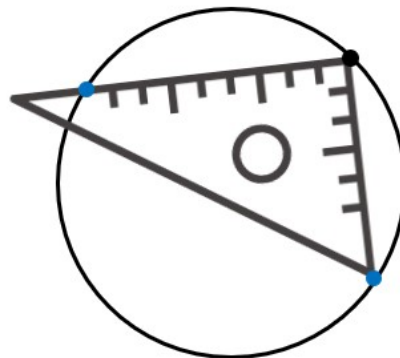
STEP2 赤い点同士を結ぶ

結ぶと次のようになって、円周角が 90° だから、赤線は直径ということがわかるよ。

つまり、円の中心は赤線の上にあるってことだね



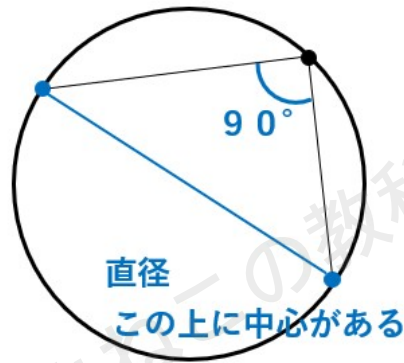
STEP3 さらに三角定規の直角部分が円周に重なるように置いて、円周と交わる点を2つ取る



STEP4 青い点同士を結ぶ

結ぶと次のようになって、円周角が 90° だから、青線は直径ってことがわかるよ。

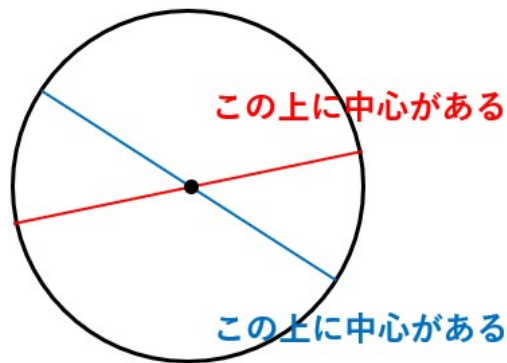
つまり、円の中心は青線の上にあるってことだね。



STEP5 赤線と青線が交わったところが中心

赤線も直径、青線も直径でどちらともの上にあるってことになるよ。

だから交わっているところが中心になるね。



「円周角と弧の定理」「直径と円周角の定理」まとめ

円周角と弧の定理

- ・一つの円で弧の長さが等しいとき、それに対する円周角も等しい
- ・円周角が等しいとき、それに対する弧の長さは等しい

直径と円周角の定理

- ・線分ABを直径とする円の円周上に点Pを取ると、 $\angle APB=90^\circ$ になる
- ・ $\angle APB=90^\circ$ ならば、線分ABは円Oの直径である

