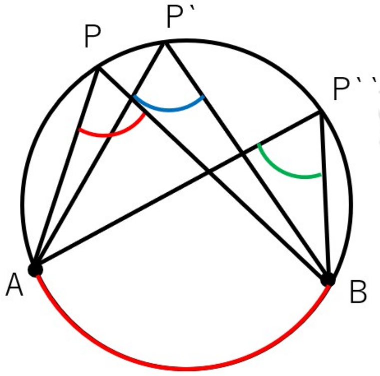
「円周角と弧の定理」「直径と円周角の定理」をわかりやすく解説

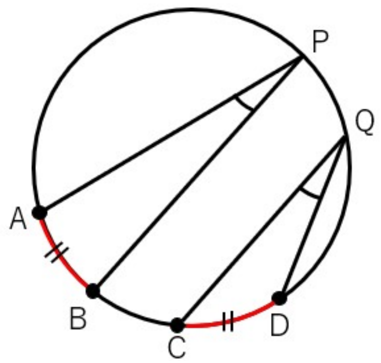
円周角と弧の関係を調べてみよう

前回「１つの弧に対する円周角の大きさは一定である」という円周角の定理を学習したね。

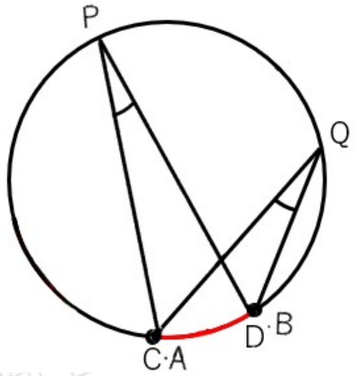


前回は「弧AB」だけに注目して見ればよかったよね。

今回は、弧ABとは別のところにある弧だけれど、弧ABと等しい弧について考えよう。



この図でイメージして欲しいのだけれど、「等しい弧」というわけなので、弧ABの部分をぐるっと円に沿ってスライドさせれば、弧CDとピッタリ重なるというわけだよね。



ということは、前回学習した「1つの弧に対する円周角」と同じ条件になるということだね。だから。
別の等しい弧に対する円周角の大きさは変わらないんだよ。
今回の図だと、∠P＝∠Qってことだね。

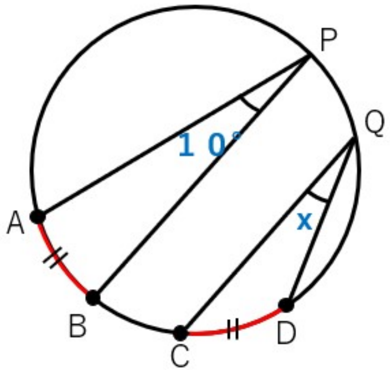
円周角と弧の関係のポイント

等しい弧に対する円周角の大きさは変わらない

それでは、練習問題にチャレンジしてみよう。

円周角と弧の関係を使った練習問題

下の図で、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$である。
xの角度を求めなさい。

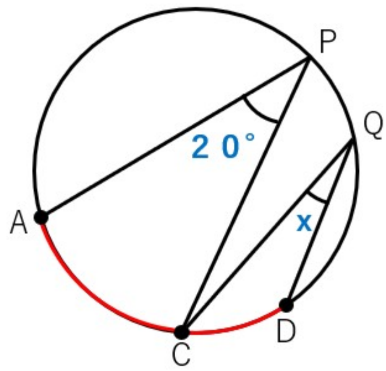


$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$だから、

・$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角∠P
・$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角∠Q
は等しくなるよね。

だから、x=10°と求めることができるね。

下の図で、$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{CD}$になっている。xの角度を求めなさい。



この問題では、弧ABと弧CDは等しくはないので、今度はすこし様子が違うね。
でも難しく考えることはないよ。
弧の長さが2倍になっているなら、円周角も2倍になるというだけのことなんだ。

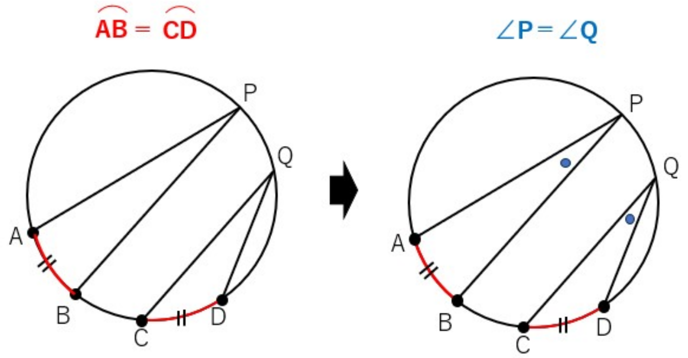
2倍すると20°になるのだから、x=10°が答えになるよ。

円周角と弧の定理

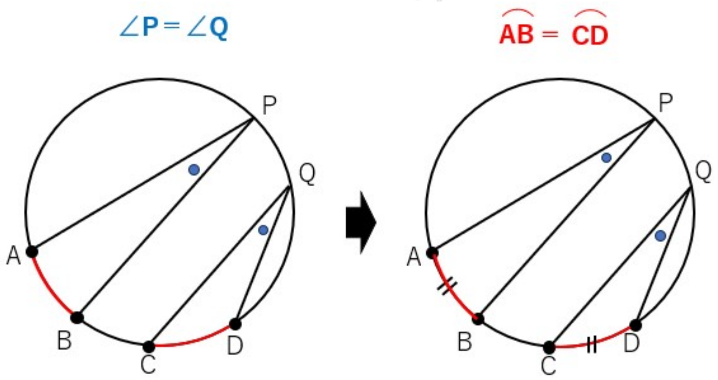
「弧の長さが等しければ、円周角も等しくなる」という円周角と弧の関係がわかったね。
この関係のことを「円周角と弧の定理」というよ。

円周角と弧の定理

1つの円で弧の長さが等しいとき、それに対する円周角も等しい



逆に、円周角が等しいとき、それに対する弧の長さも等しい

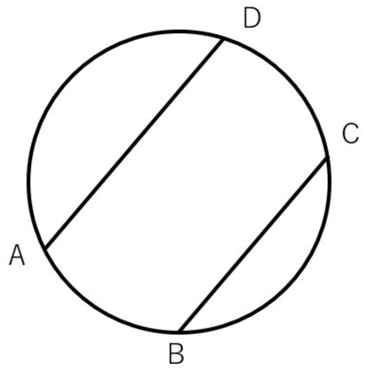


「弧の長さが等しい時、それに対する円周角も等しくなる問題」はさっきやったよね。

だから、逆の「円周角が等しい時、それに対する弧の長さも等しい」という性質を使った問題に挑戦してみよう。

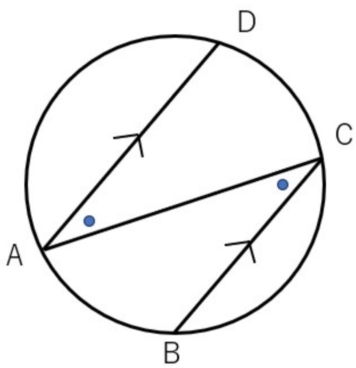
円周角と弧の定理を使った練習問題

下の図で、平行な弦AD、弦BCにはさまれた$\overset{\frown}{AB}$と$\overset{\frown}{CD}$の長さが等しくなることを証明しなさい。



まずACを結ぼう。

弦ADと弦BCは平行だから、錯角が等しくなって、∠A＝∠Cになるよね。



ここからが重要なポイントだよ。

・∠Cは$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角
・∠Aは$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角
だよね。

∠Aと∠Cの角度は等しいから、「円周角が等しいとき、それに対する弧の長さも等しい」という性質を使うと、

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$
となることがわかるね。

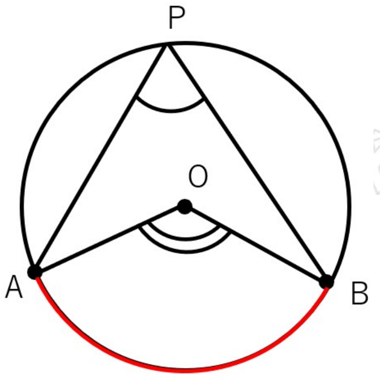
直径と円周角の定理

以前に円周角と中心角について学習したよね。ちょっと復習してみよう。

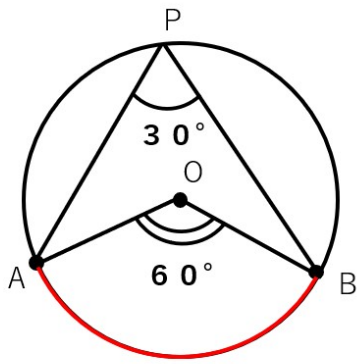
円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分である。

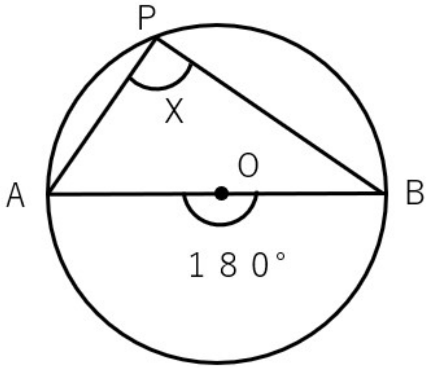
$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$



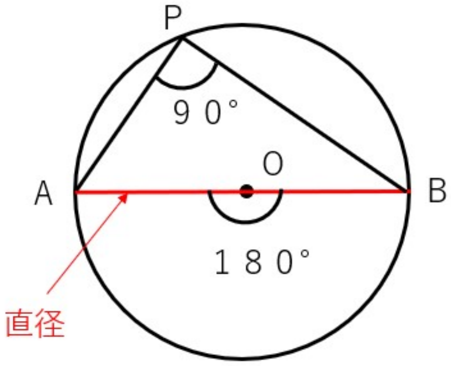
例えば、∠AOBが60° だったら∠APBは30° になるってことだったよね。



では、もし中心角が180°だったら円周角は何度になるか考えよう。



同じ弧に対する中心角の半分が円周角になるから、
円周角は180°÷2=90°と求まるね。

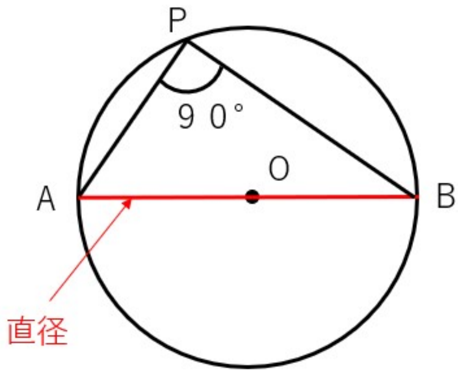


ここで気づいてほしいんだけれど、中心角が180°になるときって、直径しかありえないよね。

中心角が180°になったら、円周角は90°になるから、次の関係が成り立つんだ。

直径と円周角の定理

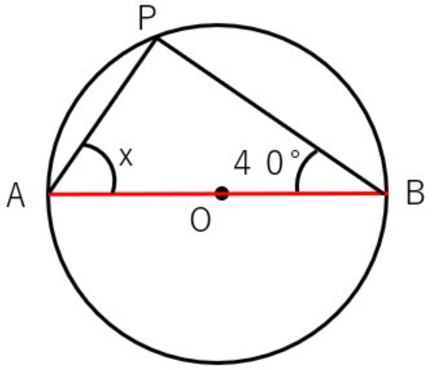
線分ABを直径とする円の円周上に点Pを取ると、∠APB=90° になる



この関係を使って問題を解いてみよう。

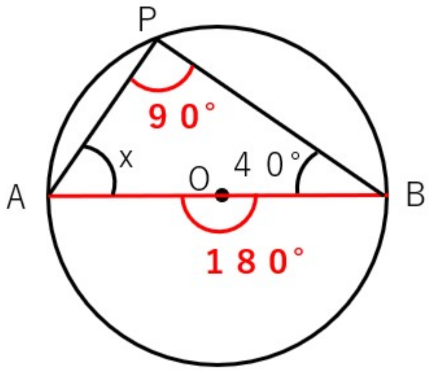
直径と円周角の定理を使った練習問題

次の図で、線分ABが円Oの直径であるとき、xの角度を求めなさい。



直径と円周角の関係を使うと、線分ABは直径だから中心角は180° になるよね。

このときの円周角∠Pは180°÷2=90°になるよね。



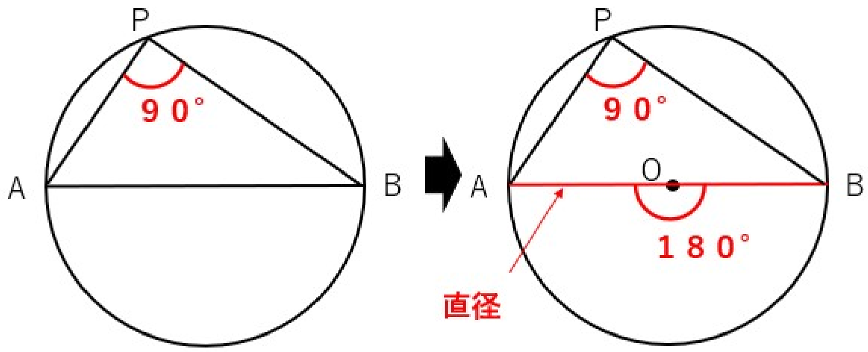
△ABPに注目すると、内角の和が180° になるから、残ったxは50° とわかるね。

直径と円周角の定理の逆

直径と円周角の定理には逆が存在するんだ。

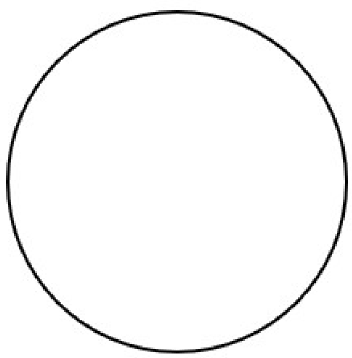
直径と円周角の定理の逆

∠APB=90° ならば、線分ABは円Oの直径になる



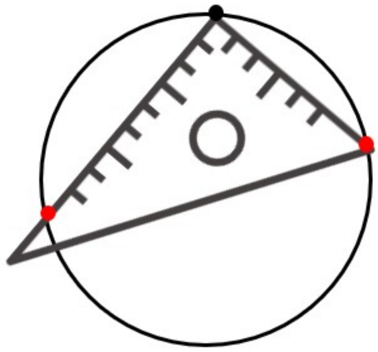
この定理は円の中心を三角定規を使って求めるときに役立つよ。

次のような円があるとき「円の中心」を三角定規を使って求めなさい。



コンパスを使って中心を求める方法は1年生の時に学習したよね。
3年生になると三角定規だけで円の中心を求めるようになるんだよ。

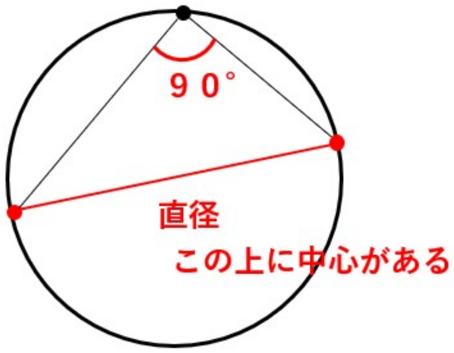
STEP1 三角定規の直角部分が円周に重なるように置いて、円周と交わる点を2つ取る



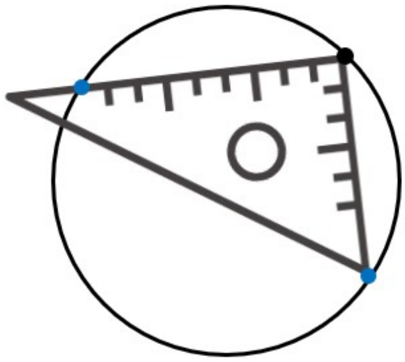
STEP2 赤い点同士を結ぶ

結ぶと次のようになって、円周角が90°だから、赤線は直径ということがわかるよ。

つまり、円の中心は赤線の上にあるってことだね



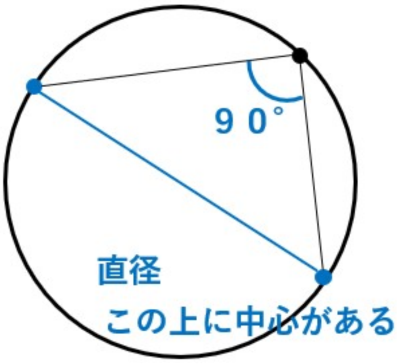
STEP3 さらに三角定規の直角部分が円周に重なるように置いて、円周と交わる点を2つ取る



STEP4 青い点同士を結ぶ

結ぶと次のようになって、円周角が90°だから、青線は直径ってことがわかるよ。

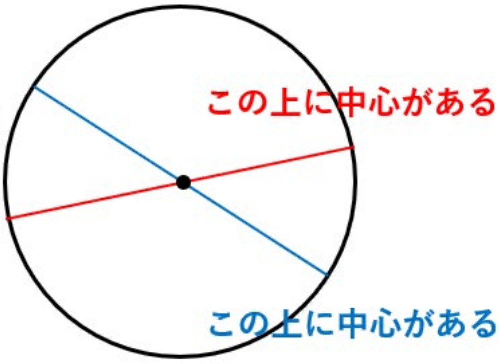
つまり、円の中心は青線の上にあるってことだね。



STEP5 赤線と青線が交わったところが中心

赤線も直径、青線も直径でどちらともの上に中心があるってことになるよ。

だから交わっているところが中心になるね。



「円周角と弧の定理」「直径と円周角の定理」まとめ

円周角と弧の定理

・1つの円で弧の長さが等しいとき、それに対する円周角も等しい
・円周角が等しいとき、それに対する弧の長さは等しい

直径と円周角の定理

・線分ABを直径とする円の円周上に点Pを取ると、∠APB=90° になる
・∠APB=90° ならば、線分ABは円Oの直径である