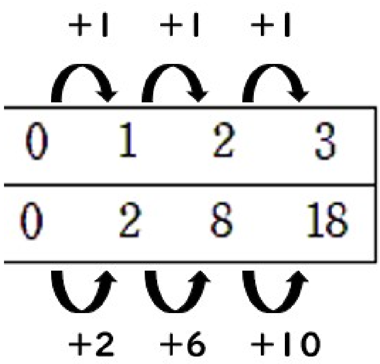
「ｙはｘの二乗に比例する」関数の変化の割合の求め方・変域とは？

$y=ax^2$の値の変化

「ｙはｘの二乗に比例する関数（$y=ax^2$）」の値が、どのように変化していくのか見ていこう。
$y=2x^2$の「ｘ」と「ｙ」の対応表を作成してみたよ。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

この対応表を見ると、「x=0」からxが1ずつ増えると、yは2、6、10と増えていっているよね。



yの増え方はずっと同じでではないよね。

ずっと同じことを「一定」というから、
「$y=ax^2$の値の変化は一定ではない」といえるね。

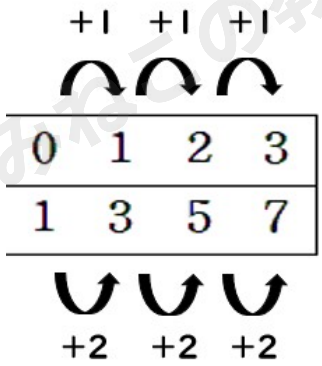
2年生で勉強した一次関数「y=ax+b」の値の変化はどうだったのか復習してみよう。

一次関数「y=ax+b」の値の変化

一次関数「y=2x+1」の「x」と「y」の対応表を確認してみよう。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

対応表を見ると「x=0」からxが1ずつ増えると、yは2ずつ増えているよね。



yは2ずつ増えているから、「y=ax+b」の値の変化は一定だとわかるね。

一次関数「y=ax+b」の値の変化

- yの増え方は一定

yはxの二乗に比例する関数「$y=ax^2$」の値の変化

- yの増え方は一定ではない（xの値によって変わってくる）

$y=ax^2$の変化の割合の求め方

「変化の割合」という言葉を覚えているかな？
変化の割合とは、「どのくらい変化したか」を表すものだったよね。

変化の割合とは

- xが1増加したときのyの増加量を「変化の割合」という
- $\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}}$で求めることができる

yはxの二乗に比例する関数「$y=2x^2$」の変化の割合$\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}}$は、次のようになるよ。

+1 +1 +1

−1	0	1	2	3
2	0	2	8	18

+2 +6 +10

変化の割合 $\frac{2}{1}=2$ $\frac{6}{1}=6$ $\frac{10}{1}=10$

変化の割合はだんだんと大きくなっていて、一定ではないことがわかるね。

yはxの二乗に比例する関数($y=ax^2$)の変化の割合は、xの範囲によって変わってくるんだ。
実際に問題で確かめてみよう.

$y=ax^2$の変化の割合を求める問題

> $y=3x^2$について、**xの値が1から4まで増加**したときの変化の割合を求めよ。

変化の割合は、$\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}}$で求めることができるので
xとyの対応表を考えてみよう。

$y=3x^2$で

$x=1$のとき、
$y=3x^2$
$=3\times x^2$
$=3\times 1^2$
$=3\times 1$
$=3$

x=4のとき、

$y=3x^2$
$=3\times x^2$
$=3\times 4^2$
$=3\times 16$
$=48$

xとyの対応表を作ってみよう。関係のないところは「…」と書いてあるよ。

x の増加量 $\overset{+3}{\frown}$

x	…	1	…	4
y	…	3	…	48

y の増加量 $\underset{+45}{\smile}$

対応表から、xの増加量=+3、yの増加量=+45とわかるから、

$=\frac{yの増加量}{xの増加量}$
$=\frac{+45}{+3}$
$=15$

変化の割合は「15」と求めることができたね。
じゃあ次に、xの範囲を変えてみるよ。

$y=3x^2$について、**xの値が−2から1まで増加**したときの変化の割合を求めよ。

変化の割合は$\frac{yの増加量}{xの増加量}$で求めることができるので、
xとyの対応表を考えてみよう。

$y=3x^2$で

$x=-2$のとき、
$y=3x^2$
$=3\times x^2$
$=3\times(-2)^2$
$=3\times4$
$=12$

$x=1$のとき、

$y=3x^2$
$=3\times x^2$
$=3\times1^2$
$=3\times1$
$=3$

xとyの対応表を作ってみよう。関係のないところは「…」と書いてあるよ。

+3

x	…	-2	…	1
y	…	12	…	3

-9

対応表から、xの増加量=+3、yの増加量=−9とわかるので、

$=\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$
$=\dfrac{-9}{+3}$
$=-3$

変化の割合は「-3」と求めることができたね。

$y=3x^2$の変化の割合

- xの値が1から4まで増加したときの変化の割合は15
- xの値が−2から1まで増加したときの変化の割合は3

yはxの二乗に比例する関数（$y=ax^2$）の変化の割合は、xの範囲によって変わってくることをしっかり覚えておこう。

一次関数「y=ax+b」の変化の割合

一次関数の変化の割合はどうなっていうのか、復習もかねて確認しておこう。

y=2x+1の変化の割合$\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}}$は次のようになるよ。

+1　+1　+1

−1	0	1	2	3
−1	1	3	5	7

+2　+2　+2

変化の割合　$\frac{2}{1}=2$　$\frac{2}{1}=2$　$\frac{2}{1}=2$

変化の割合はずっと「2」になるから、一定だとわかるね。

一次関数の変化の割合は一定になるよ。

yはxの二乗に比例する関数と一次関数の変化の割合

- yはxの二乗に比例する関数$y=ax^2$の変化の割合は一定ではない
- 一次関数y=ax+bの変化の割合は一定

y=ax^{2}の変域

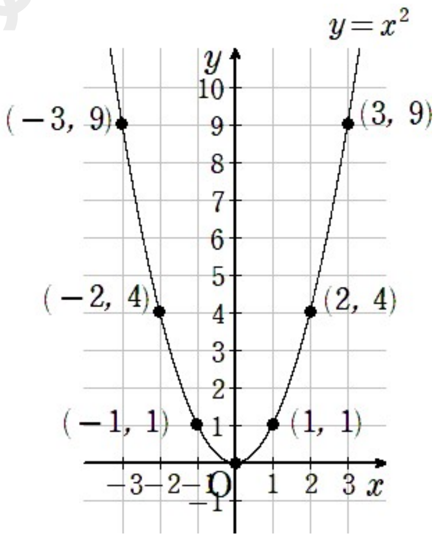
yはxの二乗に比例する関数の変域を考えてみよう。
「変域」とは、「範囲のこと」だと思っていればOKだよ。

y=x^{2}でxの変域が次のとき、yの変域を求めなさい。

(1) 1≦x≦3

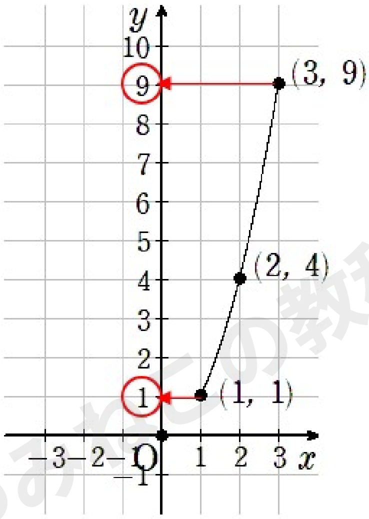
(2) −2≦x≦1

まず、y=x^{2}のグラフの形を思い出してみよう。



(1)

$1 \leqq x \leqq 3$の範囲だけグラフを書いてみると次のようになるよ。



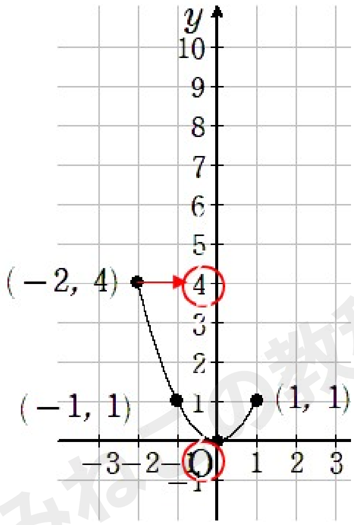
yの値は、$y=x^2$の式にxを代入してそのつど求めることができるね。

yの最小値は$y=1$のとき、
yの最大値は$y=9$のときだから

$1 \leqq y \leqq 9$
とyの変域が求まるよ。

(2)

-2≦x≦1の範囲だけグラフを書いてみると次のようになるよ。



yの最小値はy=0のとき、
yの最大値はy=4のときだから

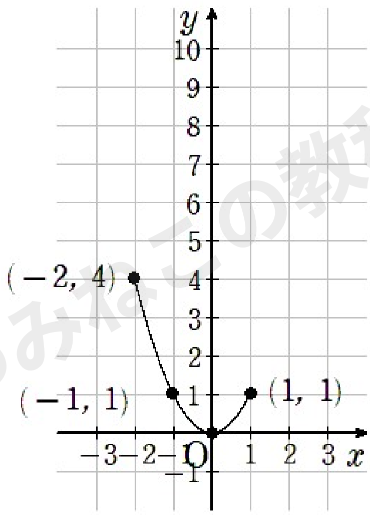
0≦y≦4

とyの変域が求まるよ。

よくある間違い

$y=x^2$でxの変域が-2≦x≦1のときのyの変域を求める問題は間違えやすいので、
注意が必要だよ。

なぜなら、xの変域に「0」が含まれているから。(−2から1の範囲に、「0」がふくまれているよね)



最大値はy=4のときだというのは間違えようがないんだけれど、問題は最小値。

グラフを書けば、最小値はxが「0」のときのy=0のときだとわかるんだけれど、
グラフを書かずに式と変域だけで見てしまうと、つい最小値はx=1のときのy=1と早とちりしてしまうんだよ。

ミスをふせぐために、yはxの二乗に比例する関数($y=ax^2$)のx変域が「0」をはさむ場合は、簡単でいいのでグラフを書いてyの変域を確かめるのが確実で安全だね。

「yはxの二乗に比例する関数の変化の割合・変域」まとめ

- yはxの二乗に比例する関($y=ax^2$)の値の変化は一定ではない
- yはxの二乗に比例する関数($y=ax^2$)の変化の割合は、xの範囲によって変わってくる
- xの変域に「0」が含まれている場合は、yの変域の最小は「0」になるので、注意しよう