

「三平方の定理の利用」 円錐の母線・正方形の対角線・三角形の高さ

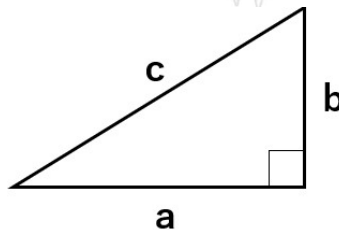
三平方の定理を利用して円錐の母線を求めよう

三平方の定理を利用すると、円錐の母線を求めることができるよ。
三平方の定理を忘れてしまった人は再確認しておこうね。

直角三角形の3辺の長さを a 、 b 、 c とすると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

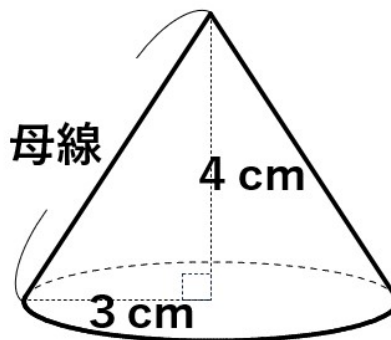
という関係が成り立つよ。



これを「三平方の定理」というんだったよね。

問題

下の図は、底面の半径が3 cm、高さが4 cmの円錐である。
母線の長さを求めなさい。

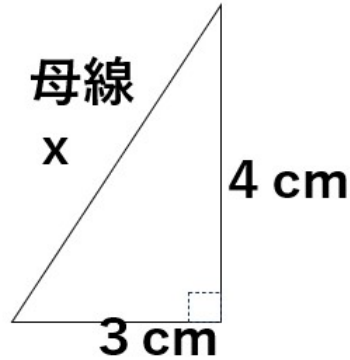


立体の問題は平面にして考えるとわかりやすいよ。

立体の円錐の、母線・高さ・底辺の半径部分に注目して平面で考えてみよう。



円錐の半径と高さは垂直に交わるから、次のような直角三角形を抜き出して考えることができるね。



この直角三角形で三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 = x^2$$

$$9 + 16 = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

長さがマイナスはありえないから、母線の長さが5 cmだとわかったね。

三平方の定理を利用して円錐の母線を求める方法

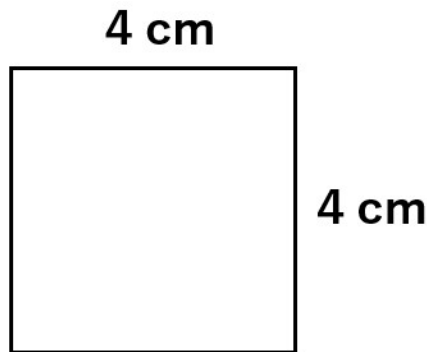
母線・高さ・底辺の半径部分に注目して、母線が斜辺になる平面の直角三角形として考えよう。

三平方の定理を利用して正方形の対角線を求めよう

それでは、三平方の定理を利用して、今度は正方形の対角線を求める方法を考えてみよう。

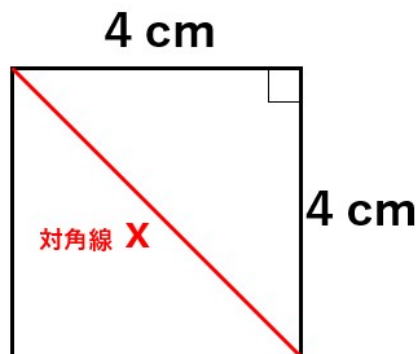


1 辺が 4 cm の四角形の対角線の長さを求めなさい。



正方形の四隅の角度はすべて直角なので、対角線を引くと、直角三角形を作ることができるね。

この直角三角形で三平方の定理を使えば、対角線の長さを求めることができるんだ。



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$4^2 + 4^2 = x^2$$

$$16 + 16 = x^2$$

$$32 = x^2$$

$$x^2 = 32$$

$$x = \pm\sqrt{32}$$

$$x = \pm 4\sqrt{2}$$

長さがマイナスはありえないから、対角線の長さが $4\sqrt{2}$ cm だとわかったね。

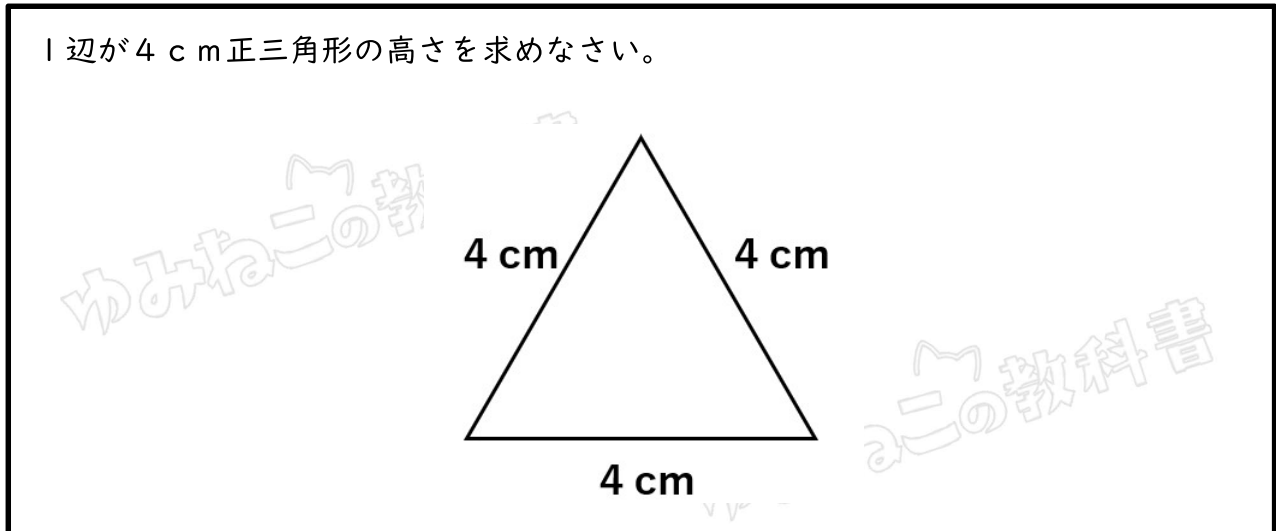
三平方の定理を利用して正方形の対角線を求める方法

対角線を引き、対角線を斜辺とする直角三角形として考えよう。



三平方の定理を利用して正三角形の高さを求めよう

最後に、三平方の定理を利用して、正三角形の高さを求める方法を考えよう。



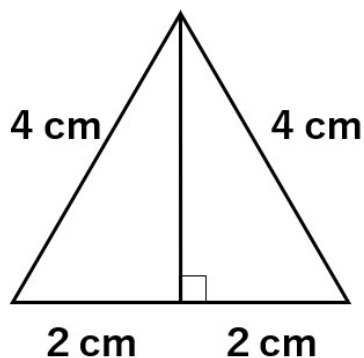
正三角形の頂点から底辺に垂線を引くと、底辺は垂直に2等分されるんだ。

なぜなら、二等辺三角形の定理「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する。」が使えるからだよ。

正三角形は、3辺が正しい三角形だよな。

ということは、もちろん「2辺が等しい」二等辺三角形の定理も使えるんだよ。※2辺が等しい三角形が、さらに3辺とも等しくなったのが正三角形だからね。

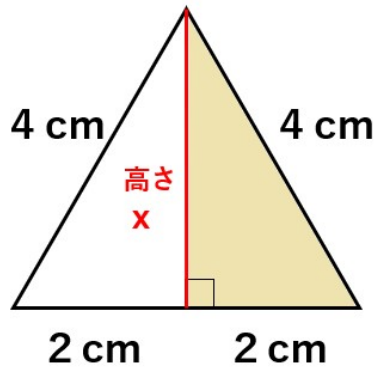
頂点から底辺に垂線を引くことで、底辺は垂直に2等分されて、直角を作り出すことができるし、2等分された底辺はそれぞれ2 cmとなったね。



もとの1辺を斜辺とする直角三角形ができたね。



それでは色のついた直角三角形で三平方の定理を使おう。
 ※もちろん、左右どちらの直角三角形でも求めることができるよ。



斜辺が 4 cm だから、 $c = 4$ を代入しようね。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$2^2 + x^2 = 4^2$$

$$4 + x^2 = 16$$

$$x^2 = 16 - 4$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

長さがマイナスはありえないから、正三角形の高さが $2\sqrt{3}$ cm だとわかったね。

三平方の定理を利用して正三角形の高さを求める方法

頂点（頂角）から底辺に垂直な 2 等分線を引いたと考えよう。

もとの 1 辺が斜辺、もとの 1 辺の半分の長さが底辺の直角三角形と考えることができるよ。

特別な直角三角形の 3 辺の比

この「正方形の中にできる直角三角形」や「正三角形の中にできる直角三角形」は、「特別な直角三角形」と呼ばれるんだ。

なぜ特別扱いするかというと、この 2 つの直角三角形は、「3 辺の比が決まっている」んだ。



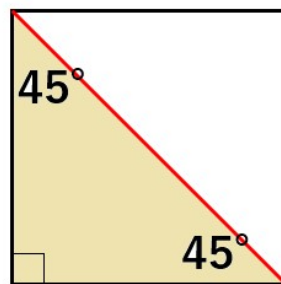
だから、三平方の定理で二乗の計算を使わなくてもすぐに長さを求めることができる、便利な直角三角形なんだよ。

それでは、特別な直角三角形を2つ紹介するね。

45°、45°、90°の直角三角形

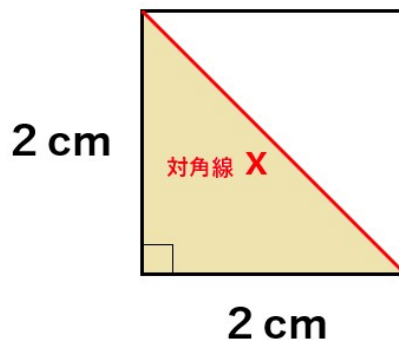
特別な直角三角形の1つ目は、3つの角が「45°、45°、90°」の直角三角形。さっき確認したとおり、正方形に対角線を引くと3つの角度が45°、45°、90°の直角三角形ができたね。

「45°、45°、90°」の3つの角度を見た瞬間、「よっしゃー」となる感じだよ。



なぜ「よっしゃー」となるか説明をするね。

1辺の長さが2cmの正方形の対角線の長さ
たとえば、1辺の長さが2cmの正方形で対角線を求めてみるよ。



1辺の長さが2cmのときの対角線の長さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$2^2 + 2^2 = x^2$$



$$4 + 4 = x^2$$

$$8 = x^2$$

$$x^2 = 8$$

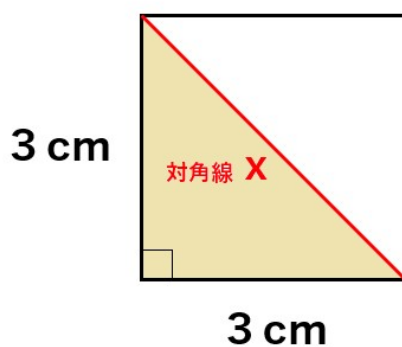
$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

対角線の長さは $2\sqrt{2}$ cmと求まるよ。

1 辺の長さが 3 cm の正方形の対角線の長さ

では、今度は 1 辺の長さが 3 cm の正方形の対角線を求めてみるよ。



1 辺の長さが 3 cm のときの対角線の長さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 3^2 = x^2$$

$$9 + 9 = x^2$$

$$18 = x^2$$

$$x^2 = 18$$

$$x = \pm\sqrt{18}$$

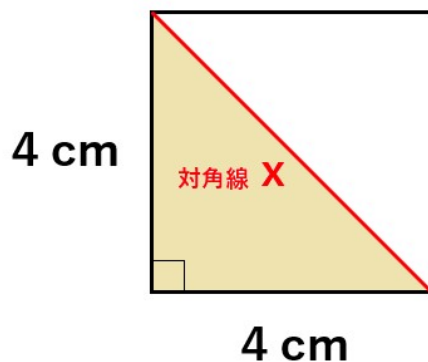
$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

対角線の長さは $3\sqrt{2}$ cmと求まるよ。



1 辺の長さが 4 cm の正方形の対角線の長さ

次に、1 辺の長さが 4 cm の正方形の対角線を求めてみるよ。



1 辺の長さが 4 cm のときの対角線の長さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$4^2 + 4^2 = x^2$$

$$16 + 16 = x^2$$

$$32 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{32}$$

$$x = \pm 4\sqrt{2}$$

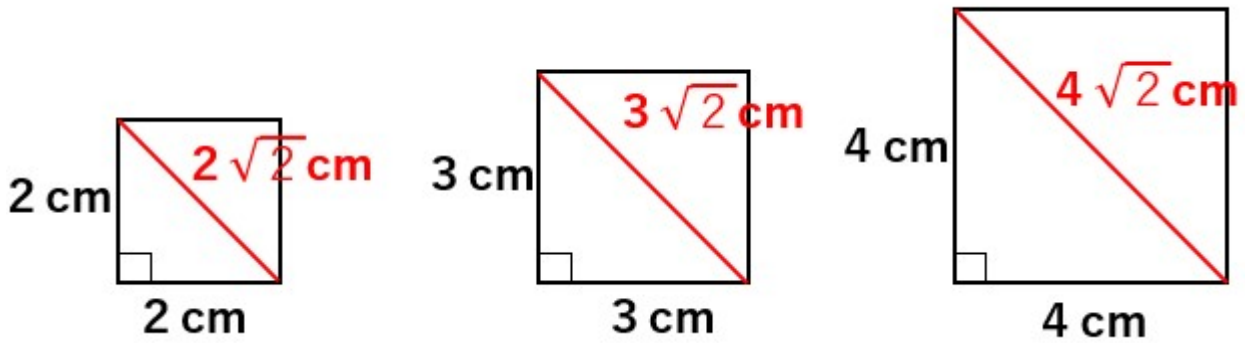
対角線の長さは $4\sqrt{2}$ cm と求まるよ。

45° 、 45° 、 90° の直角三角形の 3 辺の比

1 辺の長さが 2、3、4 cm のそれぞれの場合の対角線の長さを求めたら、 $2\sqrt{2}$ 、 $3\sqrt{2}$ 、 $4\sqrt{2}$ cm になったよね。

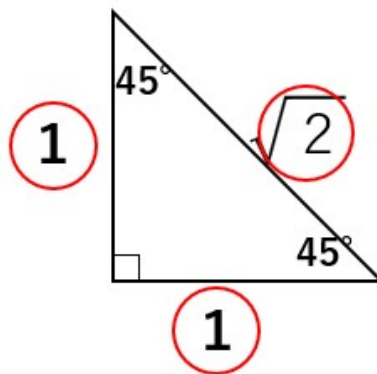


下の図で再確認しよう。



気が付くことがあるかな？

なんと 45° 、 45° 、 90° の直角三角形の3辺の比はすべて「 $1:1:\sqrt{2}$ 」になっているんだ。



このとき、斜辺が $\sqrt{2}$ になるというのがポイントだからおさえておこうね。

3つの角が「 45° 、 45° 、 90° 」の直角三角形であれば、1辺の長さが分かれば他の長さもすぐに求めることができるということだね。

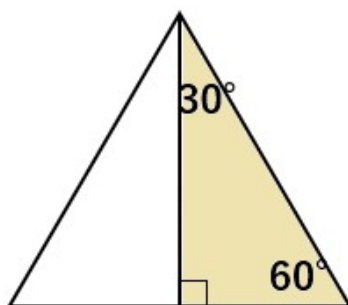


30°、60°、90°の直角三角形

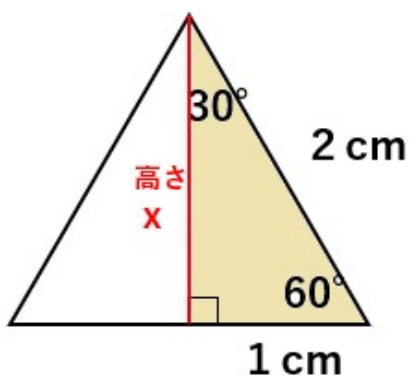
特別な直角三角形の2つ目は「30°、60°、90°」の直角三角形。

さっき確認したとおり、正三角形の頂点から垂線を引くと、3つの角度が「30°、60°、90°」の直角三角形ができるよね。

※正三角形の角度はすべて60°だからね。



1辺の長さが2 cmの正三角形からできる直角三角形の3辺の長さ



1辺の長さが2 cmのときの正三角形の高さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + x^2 = 2^2$$

$$1 + x^2 = 4$$

$$x^2 = 4 - 1$$

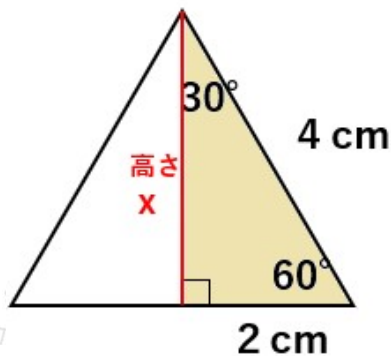
$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

高さは $\sqrt{3}$ cmと求まるよ。



1 辺の長さが 4 cm の正三角形からできる直角三角形の 3 辺の長さ



1 辺の長さが 4 cm のときの正三角形の高さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$2^2 + x^2 = 4^2$$

$$4 + x^2 = 16$$

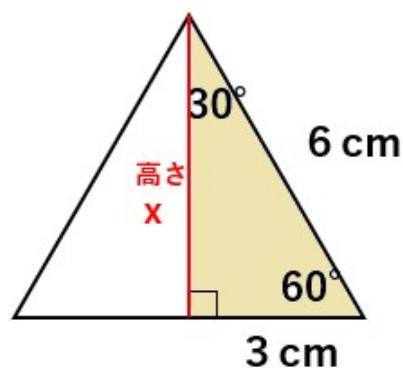
$$x^2 = 16 - 4$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

高さは $2\sqrt{3}$ cm と求まるよ。

1 辺の長さが 6 cm の正三角形からできる直角三角形の 3 辺の長さ



1 辺の長さが 6 cm のときの正三角形の高さは三平方の定理を使うと

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + x^2 = 6^2$$

$$9 + x^2 = 36$$

$$x^2 = 36 - 9$$

$$x^2 = 27$$



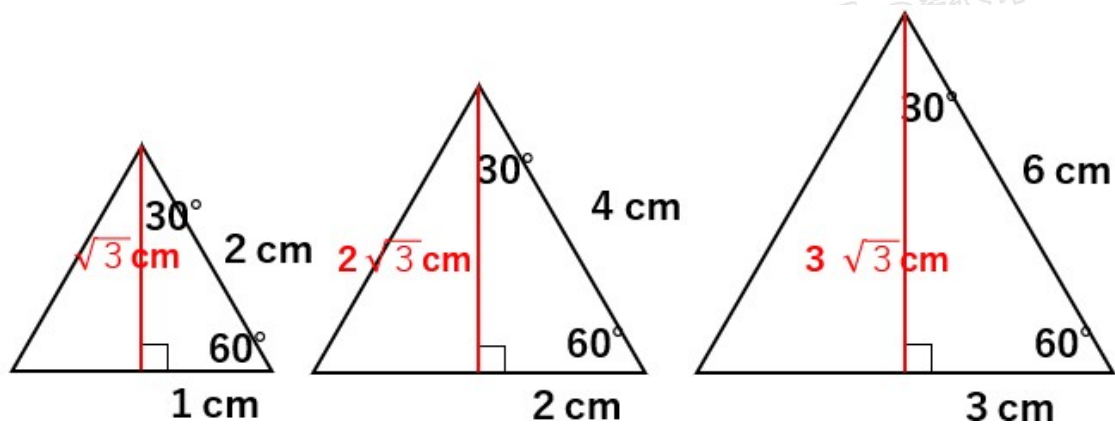
$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

高さは $3\sqrt{3}$ cmと求まるよ。

30°、60°、90°の直角三角形の3辺の比

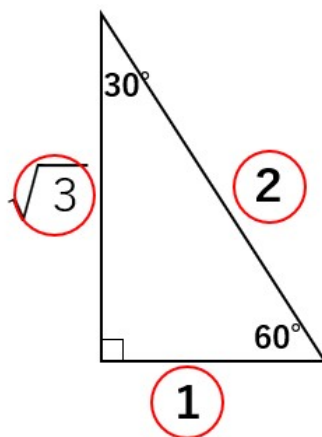
1辺の長さが2、4、6cmの正三角形それぞれの場合、高さを求めたら、 $\sqrt{3}$ 、 $2\sqrt{3}$ 、 $3\sqrt{3}$ cmになったよね。

下の図で再確認してみよう。



今度も気が付くことがあるかな？

30°、60°、90°の直角三角形の3辺の比はすべて「 $1 : \sqrt{3} : 2$ 」になるんだ。



この直角三角形の場合、斜辺が「2」になるということがポイントなので、おさえておこう。

3つの角が「 30° 、 60° 、 90° 」の直角三角形であれば、1辺の長さが分かれば、他の長さもすぐに求めることができるというわけだね。

「三平方の定理の利用」まとめ

三平方の定理を利用して円錐の母線を求める方法

母線・高さ・底辺の半径部分に注目して、母線が斜辺になる平面の直角三角形として考えよう。

三平方の定理を利用して正方形の対角線を求める方法

対角線を引き、対角線を斜辺とする直角三角形として考えよう。

三平方の定理を利用して正三角形の高さを求める方法

頂点（頂角）から底辺に垂直な2等分線を引いたと考えよう。

もとの1辺が斜辺、もとの1辺の半分の長さが底辺の直角三角形と考えることができるよ。

45° 、 45° 、 90° の直角三角形の3辺の比はすべて「 $1:1:\sqrt{2}$ 」になる

30° 、 60° 、 90° の直角三角形の3辺の比はすべて「 $1:\sqrt{3}:2$ 」になる

