三平方の定理とは？
公式の証明と問題の解き方をわかりやすく解説

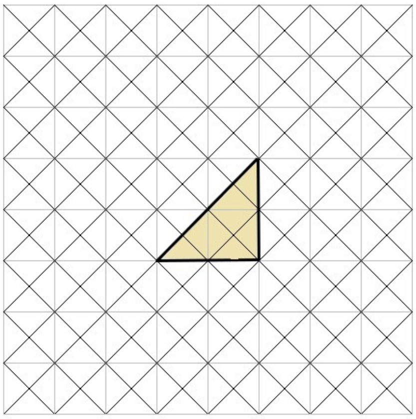
直角三角形の３辺の長さについて成り立つ関係の証明

直角三角形の３辺の長さには大切な関係があるんだ。
どんな関係があるかを確かめていこう。

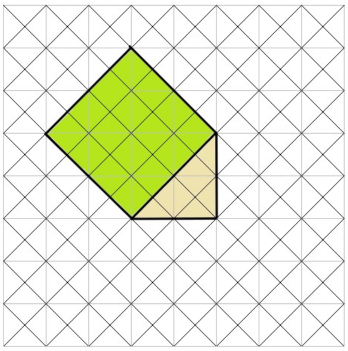
確かめる方法はたくさんあるんだけど３つだけ紹介するね。

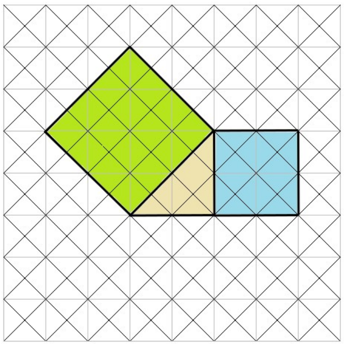
直角三角形の３辺の長さについて成り立つ関係の証明①

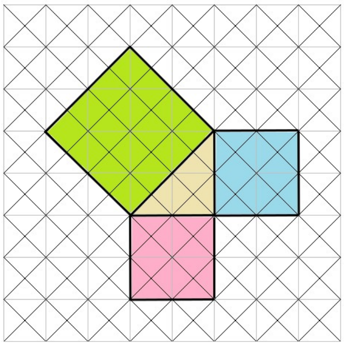
次のような直角三角形があったとしよう。わかりやすくするために線を引いているよ。



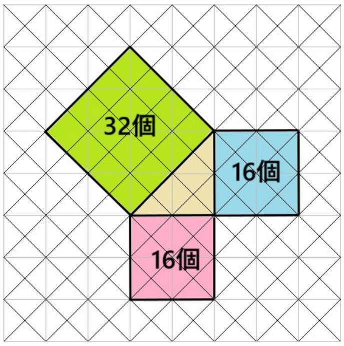
ここで、直角三角形の3つの辺を1辺とする正方形を作っていこう。







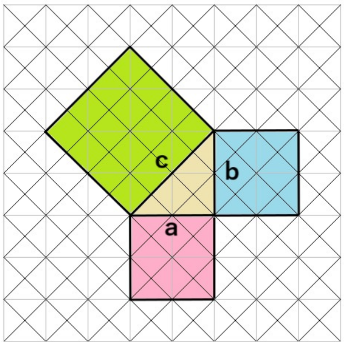
「直角三角形の周りにできた3つの正方形」は小さい三角形が何こ分かを数えると次の通りになるよ。



赤の正方形・・・16個
青の正方形・・・16個
緑の正方形・・・32個

→赤の正方形＋青の正方形＝緑の正方形になっていることがわかるね。

では、直角三角形の3辺の長さがa、b、cだとしよう。



3つの正方形の面積は

赤の正方形・・・a^2
青の正方形・・・b^2
緑の正方形・・・c^2

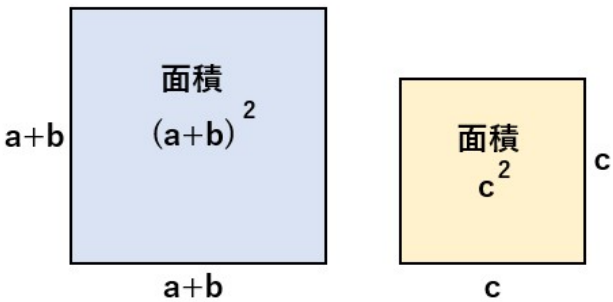
になるよね。

赤の正方形+青の正方形=緑の正方形だったから、
$a^2+b^2=c^2$
という関係が成り立つね。

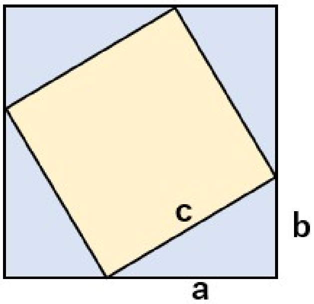
直角三角形の長さについて成り立つ関係を見つけられたね。
他の方法でも見つけてみよう。

直角三角形の3辺の長さについて成り立つ関係の証明②

1辺が(a+b)の正方形と
1辺が c の正方形を使って考えていこう。

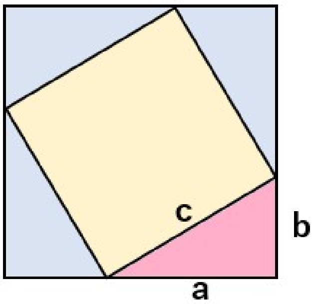


2つの正方形を次のように重ねてみたよ。



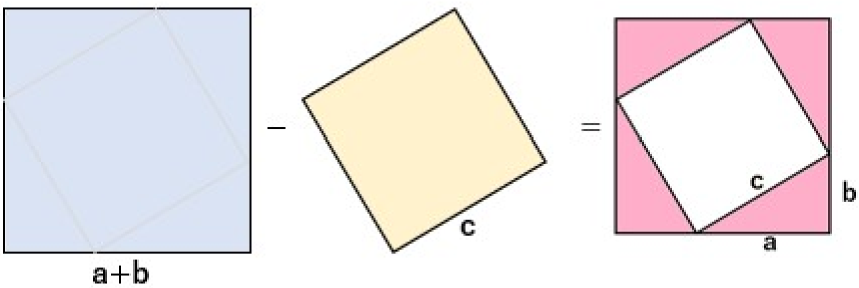
上の図からわかる面積

- 青の正方形全体の面積・・・$(a+b)^2$
- 黄色の正方形の面積・・・c^2
- 下に示した直角三角形1つ分の面積・・・$a\times b\div 2=\frac{ab}{2}$



これらの面積を使って、3辺の長さの関係を見つけよう。

下の図の意味はわかるかな？
青の正方形から、黄色の正方形を引いたら、赤の直角三角形4こ分になることを表しているよ。



この関係を文字で表してみよう。

青の正方形−黄色の正方形=赤の直角三角形4こ分

$(a+b)^2-c^2=\frac{ab}{2}\times4$ ←直角三角形4こ分だから「×4」

$(a+b)^2$を展開して、$\frac{ab}{2}\times4$を計算しよう。

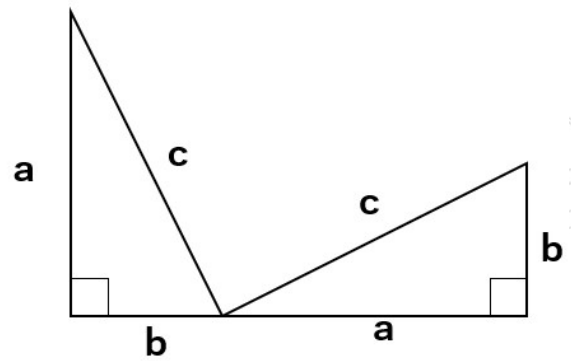
$(a+b)^2-c^2=\frac{ab}{2}\times4$
$a^2+2ab+b^2-c^2=2ab$ ←両辺に2abがあるから消えるよ。
$a^2+b^2-c^2=0$ ←「$-c^2$」を右辺に移項しよう。
$a^2+b^2=c^2$

さっきと同じように
$a^2+b^2=c^2$
という関係が導けたね。

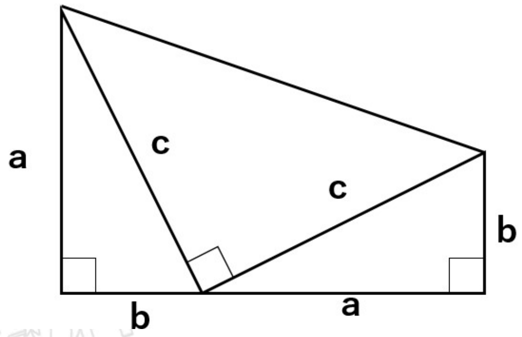
最後にもう1つの方法でも証明してみよう。

直角三角形の3辺の長さについて成り立つ関係の証明③

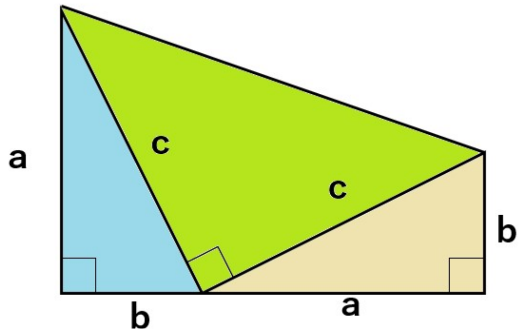
合同な直角三角形を2つ組み合わせてみよう。



次のように線を引くと、新たに直角三角形が出来上がるよ。



3つの三角形の面積と全体の台形の面積を求めよう。



上の図からわかる面積

青の直角三角形と黄色の直角三角形の面積・・・a×b÷2=$\frac{ab}{2}$

緑の直角三角形の面積・・・c×c÷2=$\frac{c^2}{2}$

全体の台形の面積は下のように求められるよ

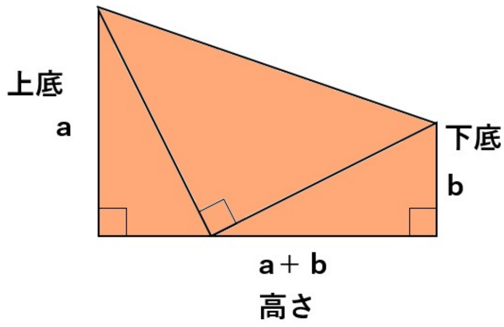
台形の面積の公式

(上底+下底)×高さ÷2

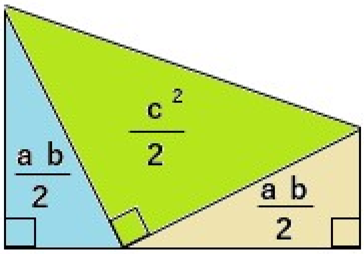
＝(a+b)×(a+b)÷2

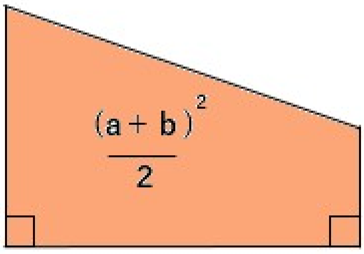
＝$(a+b)^2$÷2

＝$\frac{(a+b)^2}{2}$



下の図の意味はわかるかな？
青の直角三角形と黄色の直角三角形と緑の直角三角形をたしたら、茶色の台形になることを表しているよ。





この関係を文字と式で表してみよう。

青の直角三角形+黄色の直角三角形+緑の直角三角形=茶色の台形 になるから、

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}$$

すべて分母が2になっているから、両辺を**2**倍しよう。

$$\frac{ab}{2}\times2+\frac{ab}{2}\times2+\frac{c^2}{2}\times2=\frac{(a+b)^2}{2}$$

$ab+ab+c^2=(a+b)^2$

$(a+b)^2$を展開して式を整理しよう。

$ab+ab+c^2=(a+b)^2$

$ab+ab+c^2=a^2+2ab+b^2$

$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$ ←両辺に「2ab」があるから消すよ。

$c^2=a^2+b^2$

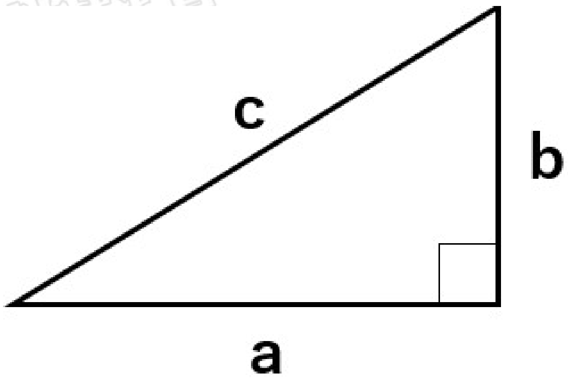
さっきと同じように

$a^2+b^2=c^2$

という関係が導けたね。

三平方の定理

直角三角形の3辺の長さについて成り立つ関係を3パターンで証明してきたね。
直角三角形の3辺の長さをa、b、cとすると
$a^2+b^2=c^2$
という関係が成り立つよ。これを**「三平方の定理（さんへいほうのていり）」**というんだ。



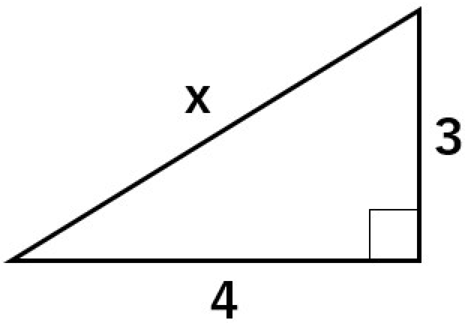
名前からしてなんとなくイメージできないかな？
「三」っていうのは、「3辺」のこと
「平方」っていうのは、「2乗」のこと
だから、3辺の2乗の性質ってことだね。
ちなみにだけど、「四平方の定理（よんへいほうのていり）」っていうのもあるんだよ。
「四」だから、「4辺」になるんだよ。
イメージ $○^2=△^2+◇^2+▽^2$

三平方の定理
- 直角三角形の3辺の長さをa、b、cとすると
  $a^2+b^2=c^2$
- ギリシャの数学者ピタゴラスにちなんで、「ピタゴラスの定理」とも言われている
  （ピタゴラスが発見したかは定かではない）

三平方の定理を覚えることは簡単だよね。
テストでもこの定理を使った問題が出るので、次の練習問題にチャレンジしてできるようにしておこう。

三平方の定理を使った問題

次の直角三角形でxの長さを求めなさい。

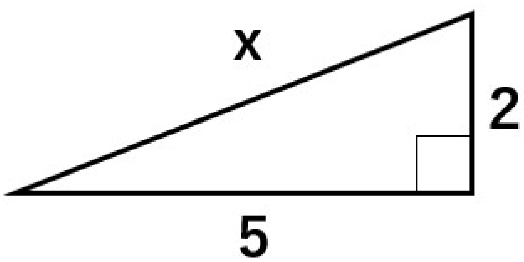


三平方の定理$a^2+b^2=c^2$に数字や文字を当てはめて
$4^2+3^2=x^2$

2乗の計算をしてxを求めよう。
$4^2+3^2=x^2$
$16+9=x^2$
$25=x^2$
$x^2=25$
$x=-5、+5$

長さにマイナスはないから、xの長さは5と求めることができるよ。

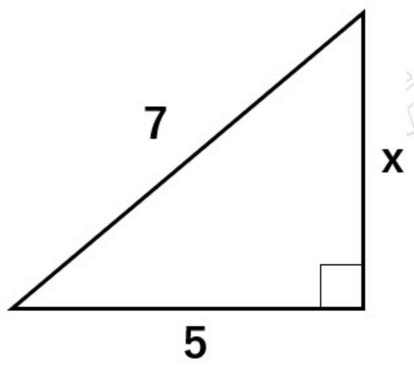
直角三角形の場合、2辺がわかったら残りの1辺が求められるというすごい性質なんだよ。



三平方の定理$a^2+b^2=c^2$に数字や文字を当てはめて
$5^2+2^2=x^2$

2乗の計算をしてxを求めよう。
$5^2+2^2=x^2$
$25+4=x^2$
$29=x^2$
$x^2=29$

2乗して29になる整数はないから、ルートを使って表そう。
$x^2=29$
$x=-\sqrt{29}$、$\sqrt{29}$
長さにマイナスはないから、xの長さは$\sqrt{29}$と求めることができるよ。



今までは斜辺がxだったんだけど、今度は違う辺がxになっているよ。ただやることは同じだよ。

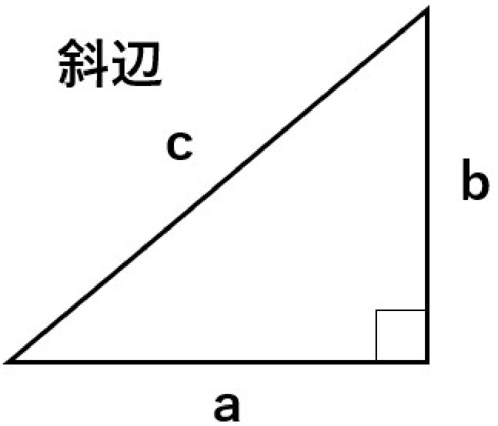
三平方の定理$a^2+b^2=c^2$に数字や文字を当てはめて
$5^2+x^2=7^2$

2乗の計算をしてxを求めよう。
$5^2+x^2=7^2$
$25+x^2=49$
$x^2=49-25$
$x^2=24$
$x=\pm\sqrt{24}$
$x=\pm2\sqrt{6}$

長さにマイナスはないから、xの長さは$2\sqrt{6}$と求めることができるよ。

三平方の定理の問題の解き方

- 直角三角形の3辺の長さをa、b、cとして、
  $a^2+b^2=c^2$に当てはめる
- cは直角三角形の斜辺になる



三平方の定理は直角三角形にしか使えないから、他の三角形で使ったりしないようにしようね。

三平方の定理（ピタゴラスの定理）まとめ

三平方の定理

- 直角三角形の3辺の長さをa、b、cとすると
  $a^2+b^2=c^2$
- ギリシャの数学者ピタゴラスにちなんで、「ピタゴラスの定理」とも言われている（ピタゴラスが発見したかは定かではない）

三平方の定理の問題の解き方

- 直角三角形の3辺の長さをa、b、cとして、
  $a^2+b^2=c^2$に当てはめる
- cは直角三角形の斜辺になる