

「命題と条件」とは？意味と真偽の見分け方を わかりやすく解説

命題と条件とは

今回の学習では、「命題と条件」という範囲を勉強するんだけど、今まで勉強してきた数学とはだいぶ違う印象を受けると思うんだ。

数学を深く学んでいくと、論理的に話を組み立て、考え、表現することが必要になるんだ。今日はその第一歩だと思ってほしい。いよいよ高校数学も本格的になってきたなって感じがするね！

今回の話だけを聞くと「なんでそんなことを考える必要があるの？」って思うかもしれないけど、これはこの先の数学で必要なんだな、って思って読んでほしいな。

この単元は、「初めて学ぶ人」と「もっと先の数学を勉強していて、この単元の復習をする人」で、読んでほしい内容を分けて説明するよ。

「初めて学ぶ人」も、全部の文章に目を通してもらいたいけれど、「復習する人」のための内容は、深く考えすぎずにサラッと読み飛ばしてくれていいよ。この単元を初めて学ぶときは、あまりこだわり過ぎてしまうと、こんがらがっちゃうんだ。

だから、「へえ～、そんな風に考えるんだ」っていうくらいの理解でOK！

「復習する人」のための内容は、四角で囲っておくから参考にしてね！

命題とは

【教科書の説明】

一般に、正しいか正しくないかが定まる文や式を命題という。
命題が正しいとき、その命題は真である、または成り立つという。また、命題が正しくないとき、その命題は偽である、
または成り立たないという。
正しいか正しくないかが定まらない分野式は命題ではない。

教科書の文章を読むと、命題っていうものは、「正しい」って決められるかどうかが大それたんだね。

曖昧なものや、人によって感じ方が違うようなものは命題とは言わないんだ。



いくつか例を見てみよう。

命題	命題じゃない
「5は6より小さい」	「5は小さい数だ」
「 $1+2=5$ 」	「 $1+2+3$ 」
「富士山の高さは3776m」	「富士山は高い山だ」

「富士山の高さは3776m」だなんて、数学っぽくなくても命題なの？とびっくりしてしまうよね。

命題は、「正しい」か「正しくない」かがハッキリするならOKなんだ。

でも、「 $1+2=5$ 」って、間違っているよ！？と思う人もいるよね？

「間違っている」ということは、「正しくない」と分かる式だということなんだ。正しくないと決まるから、「 $1+2=5$ 」は命題で、そして「偽」ということなんだよ。

命題は、正しいときは真、正しくないときは偽、と言うんだよ。

命題	命題じゃない
「5は6より小さい」 真	「5は小さい数だ」
「 $1+2=5$ 」 偽	「 $1+2+3$ 」
「富士山の高さは3776m」 真	「富士山は高い山だ」



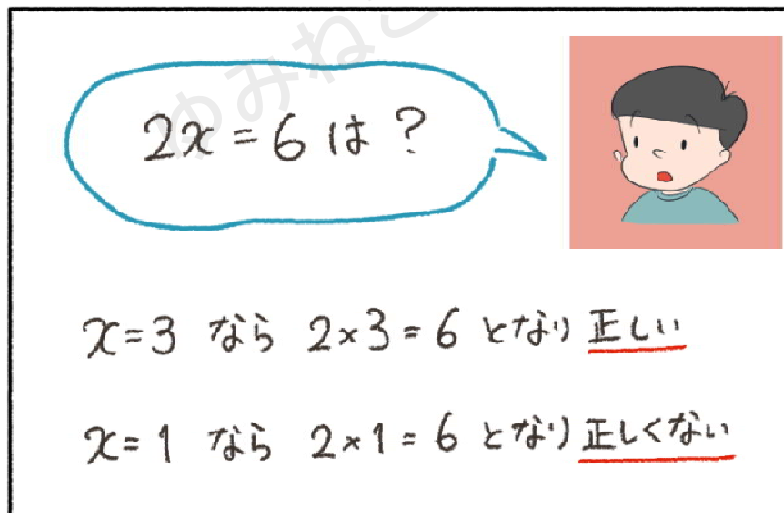
条件とは

【教科書の説明】

変数を含む文や式で、その変数に値を代入した時に真偽が決まる文や式を条件という。

「正しい」か「正しくない」かが決まる文が命題って言うってことはわかったよ！
そこで、疑問なんだけど、「 $2x=6$ 」みたいな式はどうなるのかな？

たしかに、「 $2x=6$ 」は、「 $x=3$ 」なら正しいけど、「 $x=1$ 」だと正しくないよね。こういう時はどうするんだろう。



$2x=6$ は？

$x=3$ なら $2 \times 3 = 6$ となり 正しい

$x=1$ なら $2 \times 1 = 6$ となり 正しくない

” 「 $2x=6$ 」は、「 $x=3$ 」なら正しいけど、「 $x=1$ 」だと正しくない” というように、 x の値によって真偽が変わる文章は条件と言うんだ。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」

命題には、「 $\bigcirc\bigcirc$ ならば $\triangle\triangle$ 」という形になるものが多いんだよ。

「 x は1と3の間にある数」 ならば 「 x は5より小さい数」

これは命題かな？

まず、真か偽か決められるか見てみよう。



「 x は1と3の間にある数」

→ (例) 「2」や「2.5」

ならば

「 x は5より小さい数」

→ 5より小さい数


1と3の間にある数なら、確実に5よりは小さいから、「真」だね。
真偽が決まったということは、これは命題と言えるってことだね。

こういう形の文章の時、「仮定」⇒「結論」というよ！

「 x は1と3の間にある数」ならば「 x は5より小さい数」

仮定 ⇒ 結論

p : x は1と3の間にある数
 q : x は5より小さい数
 と p, q で文章を表して
 $p \Rightarrow q$ って書よ!



復習する人にポイント解説

ところで、 $p \Rightarrow q$ の文章をもう一度見返して欲しいんだけど、 p 、 q はそれぞれ、「条件」であることが分かるかな？

仮定にあたる、「 x は1と3の間にある数」だけを抜き出すと、 x の値によって、真偽が変わるね。

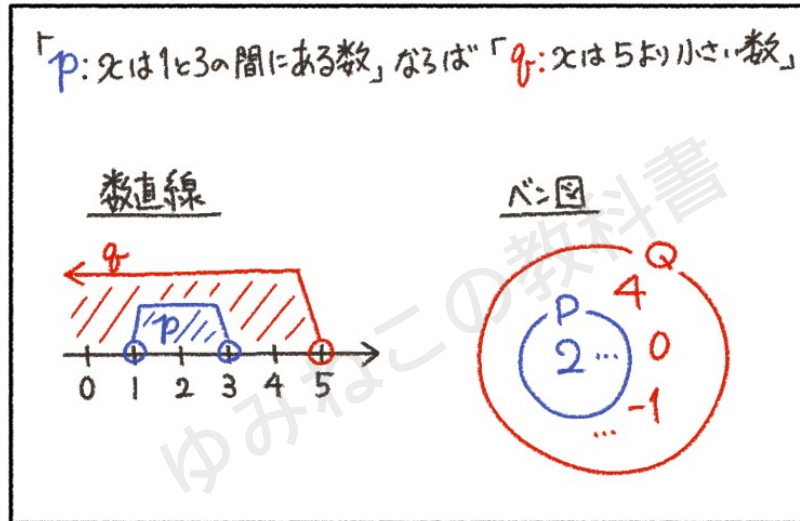
だから、仮定だけに注目すると、それは「条件」であることが分かるし、同じように結論もまた「条件」になっている。

$p \Rightarrow q$ の形の命題は、「ある条件」ならば「別の条件」という文や式が、真か偽かを考えているってことだね。



命題「 $p \Rightarrow q$ 」と集合

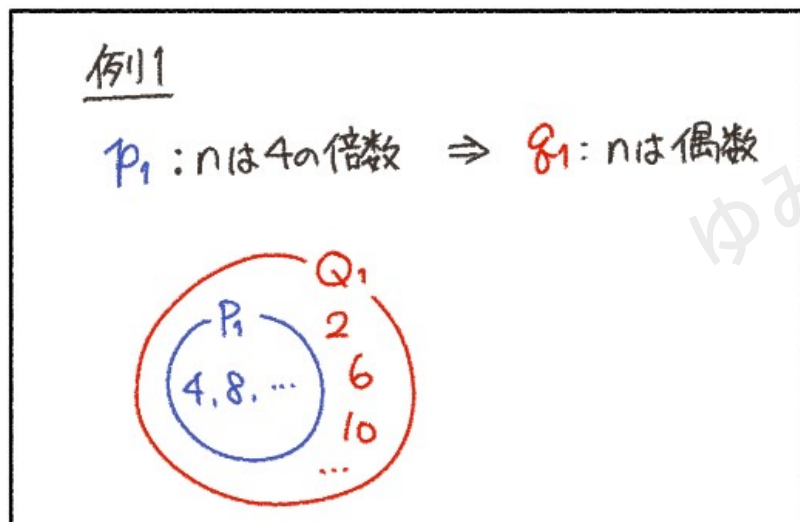
さっきの命題を、数直線に書いてみてほしいんだ。
 仮定を青、結論を赤にして書いてみるね。



横にはベン図を書いてみたよ。何か気づくことはあるかな？
 そう、数直線も、ベン図も、青が赤にすっぽり包まれているね。

こんな風に、仮定（青）が結論（赤）にすっぽり包まれている時、命題は真になるんだ！

命題と集合の考え方を説明するために、3つの例をあげてみよう。



例2

$P_2: n$ は2の倍数 \Rightarrow $Q_2: n$ は偶数

例3

$P_3: n$ は3の倍数 \Rightarrow $Q_3: n$ は偶数

どれが真か、わかるかな？

仮定（青）がすっぽり含まれているのは、例1だから、例1は真だね！

例1

$P_1: n$ は4の倍数 \Rightarrow $Q_1: n$ は偶数

$P_1 \Rightarrow Q_1$ は真 ✓



例2はどうか？

重なっている…と言うか、例2の仮定と結論の輪っかは、まったく同じだよな。

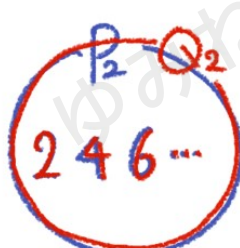
でもこれも、すっぽり包まれていると言っていいんだ。

だから、これも真だね。

そして、例2のように、輪っかがまったく同じで重なる時、仮定と結論を結ぶ矢印である「 \Rightarrow 」が、 $p \Rightarrow q$ 、 $p \Leftarrow q$ 、って感じで、両方の向きで真なんだ。こういう時は、まとめて「 $p \Leftrightarrow q$ 」って書くよ。

例2

$p_2: n$ は2の倍数 \Rightarrow $q_2: n$ は偶数



$p_2 \Rightarrow q_2$ は真
 $p_2 \Leftarrow q_2$ は真

$p_2 \Leftrightarrow q_2$
 —#

例3みたいに、包まれないで、はみ出している部分がある時はなんて言うのだろうか？
 こういう時、命題は偽なんだ。

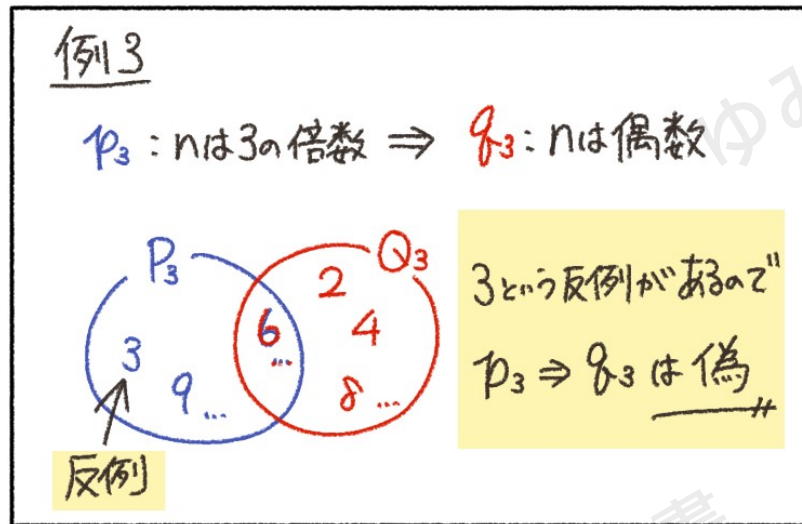
「3の倍数」ならば「偶数」ってというのは、「正しくない (=ではない)」よね。
 正しくないから命題は偽と言える。

命題が偽であることを示すためには、はみ出たところに入っているものをひとつ挙げれば
 いいんだ。

つまり、「仮定には3があるから、この命題は偽です」という感じ。
 この「3」のことを、反例というよ。

「例3には3という反例があるので偽です！」
 なんだか裁判の「異議あり！」みたいでかっこいいね。





まとめ

「命題と条件」について、今回学習したことをまとめたよ。

「命題」とは

- ・一般に、正しいか正しくないかが定まる文や式を命題という。
 → 「正しい」か「正しくない」かがハッキリするならOK
- ・命題が正しいとき、その命題は「真」である、または「成り立つ」という。また、命題が正しくないとき、その命題は「偽」である、または「成り立たない」という。
- ・正しいか正しくないかが定まらない分野式は命題ではない。

「条件」とは

- ・変数を含む文や式で、その変数に値を代入した時に真偽が決まる文や式を条件という。
- ・命題には、「○○ならば△△」という形になるものが多く、このような形の文章の時、「仮定」 \Rightarrow 「結論」という。

【ベン図での命題の真偽の見分け方】

- ・仮定（青）が結論（赤）にすっぽり包まれている時、命題は真になる。
- ・輪っかがまったく同じで重なる時、仮定と結論を結ぶ矢印である「 \Rightarrow 」は $p \Rightarrow q$ 、 $p \Leftarrow q$ 、というように、両方の向きで真である。このような時は、まとめて「 $p \Leftrightarrow q$ 」と書く
- ・包まれないで、はみ出している部分がある時は命題は偽である。
- ・命題が偽であることを示すためには、はみ出たところに入っているものをひとつ挙げればよい。この「はみ出たところに入っている」ものを「反例」という。

