

「命題の逆・裏・対偶」とは？

意味と真偽についてわかりやすく解説

論証：命題の逆・裏・対偶（たいぐう）とは？

今回の内容「命題の逆・裏・対偶（たいぐう）」も、前回の「命題と条件」のところで話したのと同じように、論理的に話を組み立て、考え、表現するために必要な事なんだ。

そして、論理的に話を組み立て、考え、表現することを、「論証」と言うんだよ。

具体的には、これから「直接証明するのは難しい事を証明しやすくする論証の方法」を2つ紹介するんだけど、今日はそのために必要な言葉を学んでいくよ。

この単元も、「初めて学ぶ人」と「もっと先の数学を勉強していて、この単元の復習をする人」で、読んでほしい内容を分けて説明するよ。

「復習する人」のための内容は、四角で囲っておくから参考にしてね！

命題の逆・裏・対偶とは？

命題の逆・裏・対偶

教科書の説明

命題「 $p \Rightarrow q$ 」と関連する命題を考えると、

命題「 $q \Rightarrow p$ 」を命題「 $p \Rightarrow q$ 」の逆

命題「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」を命題「 $p \Rightarrow q$ 」の裏

命題「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を命題「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶

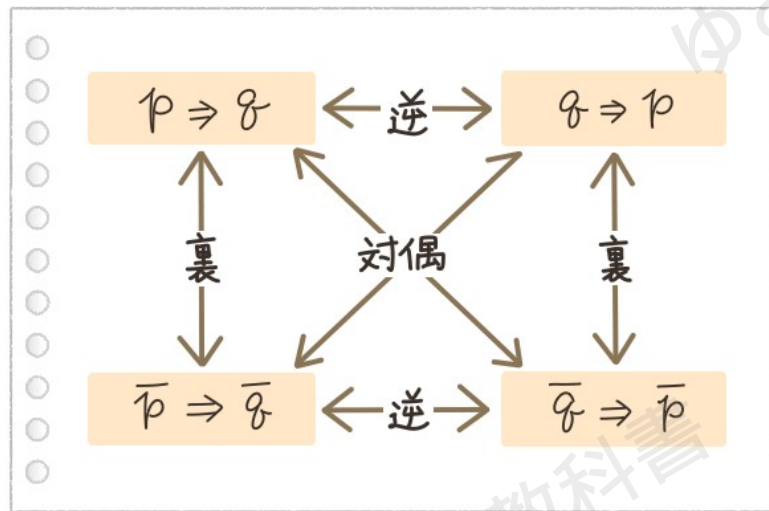
という。

ある命題が真であっても、その命題の逆は真とは限らない。また、裏も真とは限らない。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」とその対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」とは、真偽が一致する。

「逆」や「裏」は日常生活でも使う言葉だけど、「対偶（たいぐう）」というのは初めて聞いた言葉だよ。図にすると、こうなるんだ。





これが「命題の逆・裏・対偶」の関係を図にしたものだよ。

この図の中の斜めの矢印で書かれている「対偶」という関係が、命題を証明するときに強力なパワーを発揮してくれるんだ！

今日は、この「対偶」を作れるようになって、そして「対偶」が持つ重要な鍵を理解するのが目標なんだ。

そのために、言葉をひとつずつ攻略していこう。

今日は、この2つの例を使って説明していくよ。

- 例1：「カラス⇒黒い」
 例2：「4の倍数⇒2の倍数」

例1は、逆・裏・対偶を作ったときに、文章としてどんなふうになるかイメージしてもらうための例なんだ。

今回の説明では「カラスは必ず黒い」ということにしているよ。実際には他の色のカラスもいるかもしれないけど、ここでは「カラスは黒い」として読んでほしいんだ。

例2は、数学的な内容の代表として使っていくよ。

早速、この2つの命題の真偽を確認しておこう。



例1：「カラス⇒黒い」

カラスは必ず黒い。この命題は真である。

さっき言った通り、今回の説明ではカラスの色は黒としているので、例1の命題は真だと言えるね。

例2：「4の倍数⇒2の倍数」

そもそも4が2の倍数なので、その4を何倍かして作った4の倍数は当然2の倍数でもある。

この命題は真である。

例2も真だという事が分かったね。

それでは、「逆・裏・対偶」をひとつずつ攻略していこう！

命題の逆とは？

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の逆は、「 $q \Rightarrow p$ 」

p と q の位置が逆になっているのが分かるかな？

言葉の通り、 p と q の位置を逆にしたものが、命題の「逆」なんだ。

例1：「カラス⇒黒い」の逆は「黒い⇒カラス」

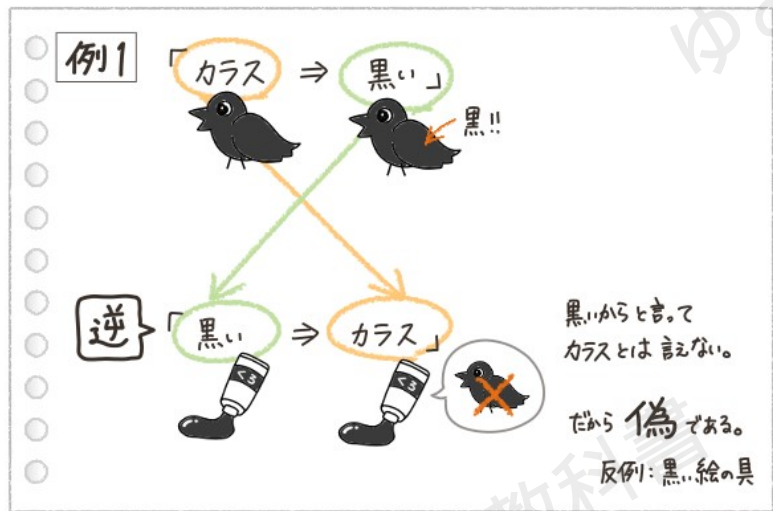
例2：「4の倍数⇒2の倍数」の逆は「2の倍数⇒4の倍数」

単純に、仮定と結論を逆にすると「逆」が作れるんだね。

仮定と結論という言葉も、大切な言葉だったね。

ここで注目してほしいのは、作った「逆」が真か？偽か？ってことなんだ。

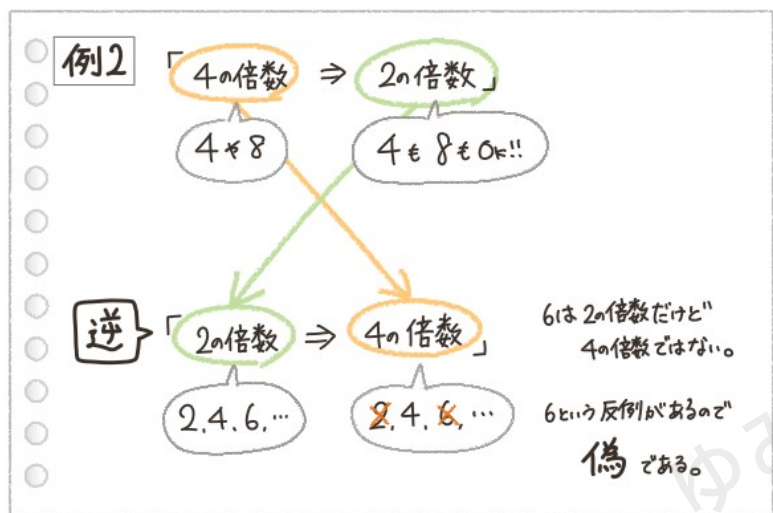




例1では、「逆」の文章は、「黒いならば、カラスだ」となるけれど、黒いものはカラス以外にもたくさんあるよね。

例えば「黒い絵の具」は、黒いけれどもカラスではない。つまり、「黒い絵の具」という反例があるから、例1の「逆」は偽ってことになるね。

例2についても見てみよう。



例2では、「逆」の命題「2の倍数ならば、4の倍数」に対して、6という反例があげられるね。

6は2の倍数だけれども、4の倍数ではないからね。ってことで、例2の「逆」も、偽だと分かった。

例1と例2の結果から、元の命題が真であっても、その「逆」は真であるとは限らない、ということが分かったかな？



まずは「逆」を作れるようになることが第一歩だね。そして「逆」を作れたら、その真偽をチェックできるようになろう！

元の命題が真のとき、「逆」が真になる場合もあるよ！

例3：もとの命題「偶数 \Rightarrow 2の倍数」について、その逆は「2の倍数 \Rightarrow 偶数」

この例3場合は、元の命題が真で、その「逆」も真になっているでしょ？

さて、気づいたかな？

これは、前回の「命題と条件」のところで、「同値」の説明をしたときと同じ例なんだ！

※同値（どうち）とは、値（あたい）が同じこと。

偶数とは「2で割り切れる数」だから、「偶数」と「2の倍数」は同値だよ。

つまり、命題「 $p \Rightarrow q$ 」において、 p と q が同値ならば、その逆も真になるんだよ。

命題の裏とは？

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の裏は、「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」

「 \bar{p} 」という記号を覚えているかな？

「 \bar{p} 」というのは、「 p ではない」という意味だったね。ちなみに、読み方は「 p バー」だったよ。

つまり、「裏」は、 p と q の順番はそのままなんだけど、内容を「 p ではない」と「 q ではない」に変えるってことだね。

例1と例2の「裏」を作ってみると、こうなるよ。

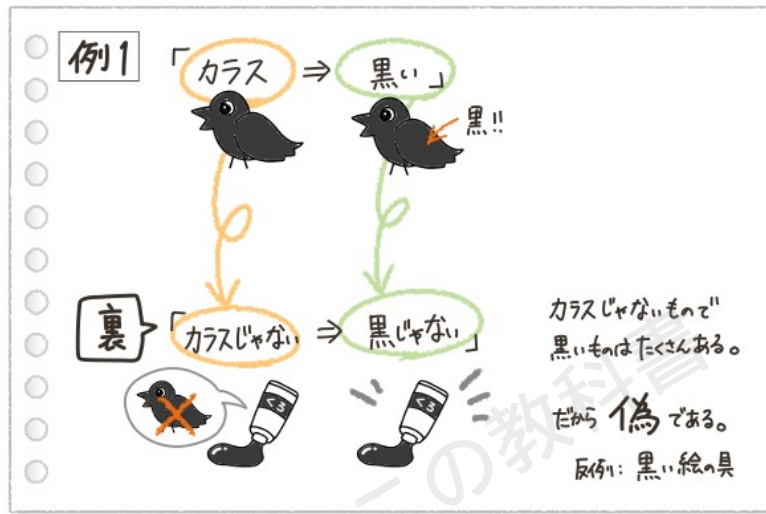
例1：「カラス \Rightarrow 黒い」の裏は「カラスじゃない \Rightarrow 黒じゃない」

例2：「4の倍数 \Rightarrow 2の倍数」の裏は「4の倍数じゃない \Rightarrow 2の倍数じゃない」

「裏」は、仮定と結論が言っていることを、それぞれ裏返しにして作るイメージだね。順番は変わらずに、内容が裏返っているイメージを持つといいよ！



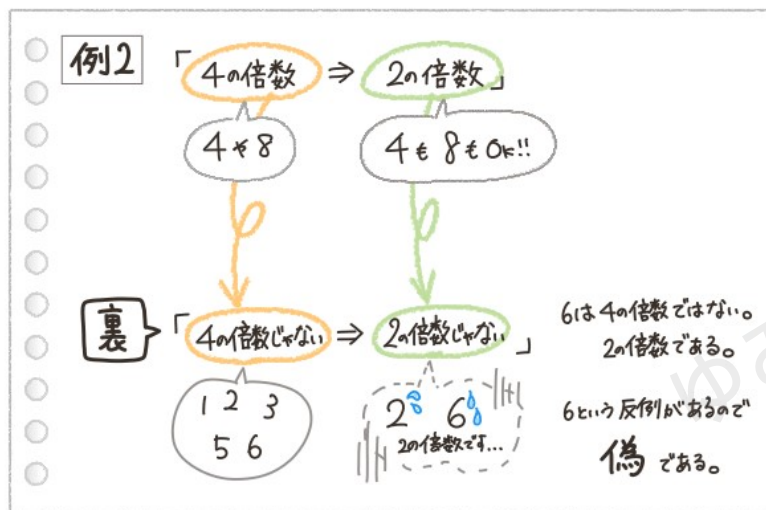
次に、この「裏」の真偽がどうなっているか確認してみよう。



例1では、「裏」の文章は「カラスじゃないならば、黒じゃない」となるけれど、カラスじゃなくても、黒いものはたくさんあるよね。

例えば「黒い絵の具」は、カラスじゃないもので、黒いものだといえる。つまり、「黒い絵の具」という反例があるから、例1の「裏」は偽ってことになるね。

例2についても見てみよう。



例2では、「裏」の命題「4の倍数ではないならば、2の倍数ではない」に対して、6という反例があげられるね。

6は4の倍数じゃないけれど、2の倍数だよ。ってことで、例2の「裏」も、偽だと分かった。



例1と例2の結果から、元の命題が真であっても、その「裏」は真であるとは限らない、ということが分かったね。

同値の場合はどうなるのかを確認しておこう。

例3：もとの命題「偶数 \Rightarrow 2の倍数」について、その裏は

「偶数ではない \Rightarrow 2の倍数ではない」

つまり、「奇数 \Rightarrow 2の倍数ではない」

「偶数と奇数」のように、片方であることを否定すると、全部もう片方になるようなときは、「偶数ではない」をもう一步踏み込んで「奇数である」と書くよ。

そして、例3も、元の命題もその「裏」も、両方真だったね。

つまり、「逆」のときと同じように、命題「 $p \Rightarrow q$ 」において、 p と q が同値ならば、その裏も真になるんだよ。

命題の対偶とは？

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は、「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」

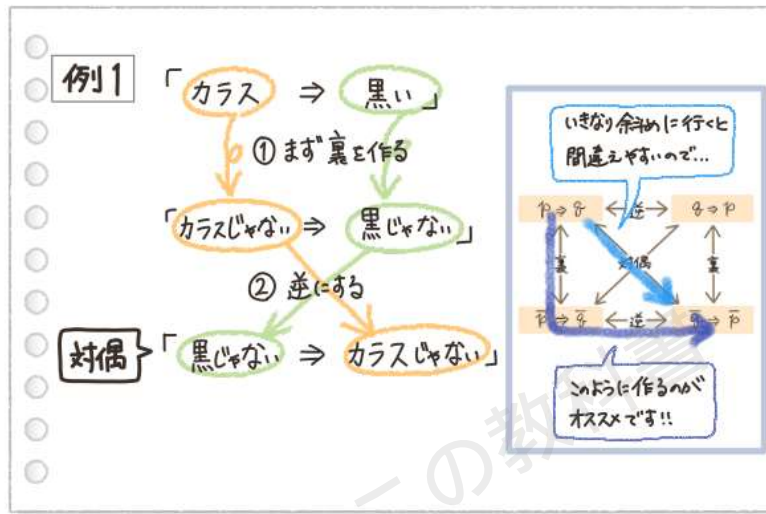
いよいよ対偶の説明だね。

対偶を作る時は、2つのステップで作るといいよ。

- ①元の命題の「裏」を作る
- ②作った「裏」を「逆」にする



具体的にやってみよう！

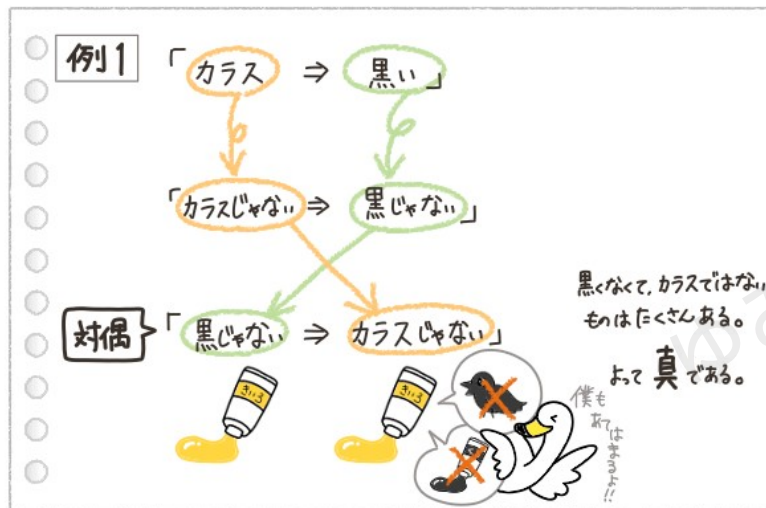


「逆」と「裏」を作る作業を両方すればいいんだね！ということは、先に「逆」をしてから「裏」をしてもいいのかな？

その通り、「逆」と「裏」を作る作業を両方行えばいいんだよ。

順番はどちらが先でも大丈夫だから、自分が考えやすい方で作るといいよ！

それでは、作った「対偶」が真か偽かを確認してみようか。



例1では、「対偶」の文章は「黒じゃないならば、カラスじゃない」となるね。黒くないもので、カラスでもないものはたくさんあるよね。

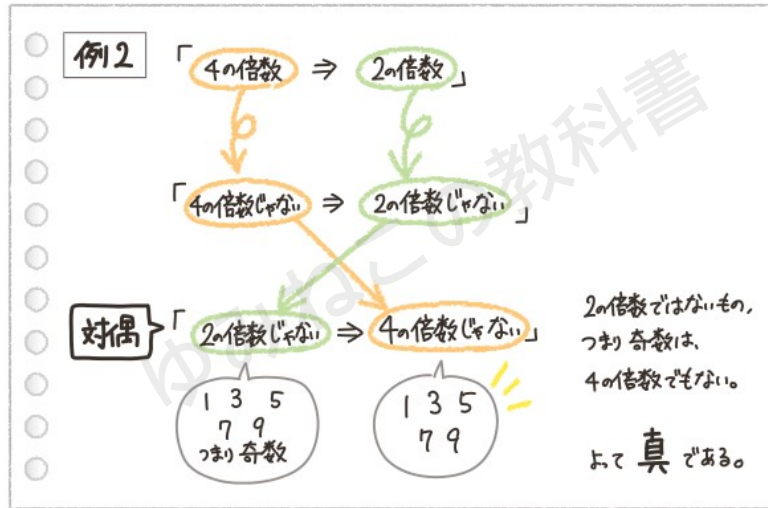
黄色い絵の具もそうだし、白鳥もあてはまるよね！



そして、今日の説明ではカラスは必ず黒いってことになっているので、黒くないならカラスではないと分かる。

つまり、例1の「対偶」は真だと言えるんだ。

例2についても見てみよう。



例2では、「対偶」の命題は「2の倍数でないならば、4の倍数ではない」となるね。

2の倍数ではないってことは、奇数だと言えるよね。

奇数はもちろん4の倍数ではない。だから「対偶」の文章「2の倍数でないならば、4の倍数ではない」は当然のことだ！といえる。

例2の「対偶」も、真だと言えたよ。



同値の場合も、対偶は真になるよ。

例3：もとの命題「偶数 \Rightarrow 2の倍数」について、
その対偶は「2の倍数ではない \Rightarrow 偶数ではない」

つまり、「2の倍数ではない \Rightarrow 奇数」

例3の元の命題もその「裏」も、両方真だよな。

つまり、命題「 $p \Rightarrow q$ 」において、 p と q が同値ならば、
その対偶も真になるってことだ。

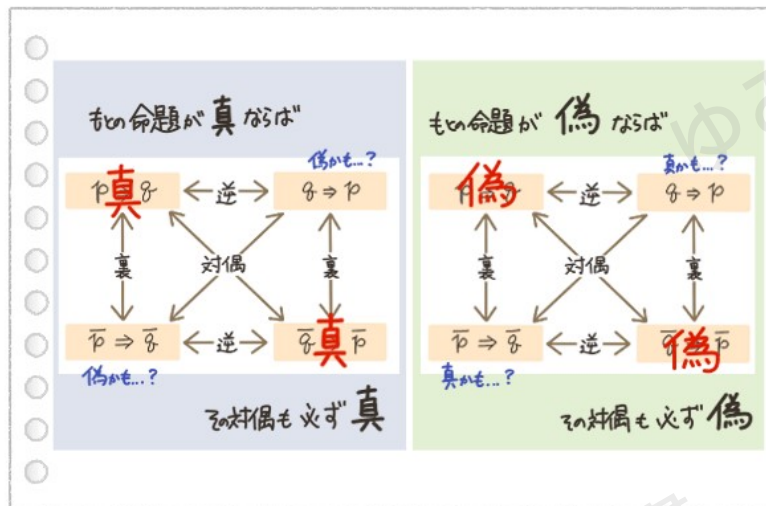
ここまでを振り返ると…「逆」と「裏」は偽になって、「対偶」だけは真になる、ってことかな？

それは正解ではあるんだけど、完全な正解とは言えないんだ。

もとの命題が真のとき、

- ・「逆」と「裏」は、真になるとは限らない（つまり、偽になるかもしれない）
- ・「対偶」は必ず真になる

これが完全な正解で、何より重要なのは、もとの命題の真偽と、対偶の真偽は一致するということなんだ！



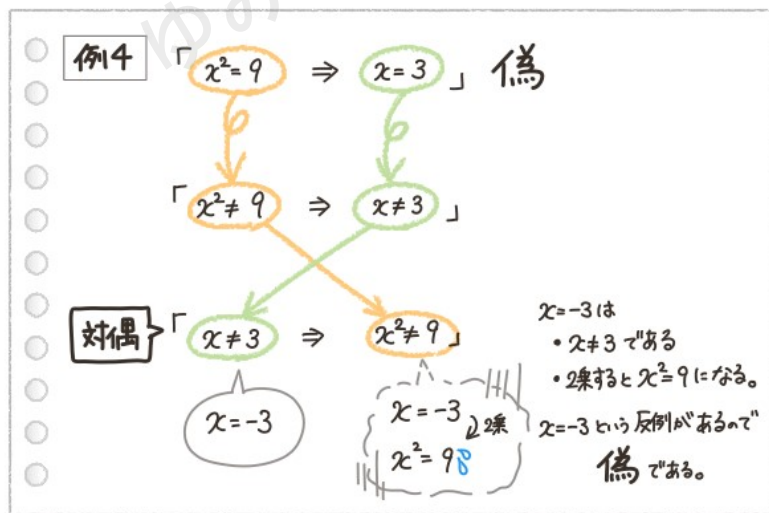
もとの命題が真ならば、その対偶は必ず真になるし、元の命題が偽ならば、その対偶も必ず偽になるんだよ。

さっきの図の右側のように、もとの命題が偽の時、対偶がどうなるかを確認しておこう。

まず、真偽を確認してみると偽になる、例4を用意するね。

例4 : 「 $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ 」
 $x^2 = 9$ を解くと、 $x = \pm 3$ だから、
 $x = -3$ という反例があるため、この命題は偽である。

では、例4の「対偶」を作ってみよう。



例4では、「対偶」に対して、 $x = -3$ という反例があげられるね。

$x = -3$ は、仮定である $x \neq 3$ を満たしていて、2乗すると $x^2 = 9$ となるから、結論である $x^2 \neq 9$ を満たさない。

これで、もとの命題が偽であった例4では、その「対偶」も、偽だと分かったね。



命題の逆・裏・対偶 まとめ

「命題の逆・裏・対偶」について、今回学習したことをまとめたよ。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の「逆」とは

- ・ p と q の位置を逆にした、「 $q \Rightarrow p$ 」がこの命題の「逆」
- ・ もとの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であっても、その「逆」が真になるとは限らない

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の「裏」とは

- ・ 条件 p を否定したと、条件 q を否定したを考慮して作る「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」がこの命題の「裏」
- ・ 「 p ではない」と、 p の内容を裏返しにしているイメージで覚えると良い
- ・ もとの命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であっても、その「裏」が真になるとは限らない

命題「 $p \Rightarrow q$ 」の「対偶」とは

- ・ ①まず、「裏」を作る
- ・ ②それを逆にする
- ・ という順番で作ると良い
- ・ 「 p ではないならば、 q ではない」という文章になる
- ・ もとの命題「 $p \Rightarrow q$ 」と、その対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」の真偽は一致する。
- ・ つまり、もとの命題が真であれば、その対偶も真となり、もとの命題が偽であれば、その対偶も偽となる。

