「命題の逆・裏・対偶」とは？
意味と真偽についてわかりやすく解説

論証：命題の逆・裏・対偶（たいぐう）とは？

今回の内容「命題の逆・裏・対偶（たいぐう）」も、前回の「命題と条件」のところで話したのと同じように、論理的に話を組み立て、考え、表現するために必要な事なんだ。

そして、論理的に話を組み立て、考え、表現することを、「論証」と言うんだよ。

具体的には、これから「直接証明するのは難しい事を証明しやすくする論証の方法」を２つ紹介するんだけど、今日はそのために必要な言葉を学んでいくよ。

この単元も、「初めて学ぶ人」と「もっと先の数学を勉強していて、この単元の復習をする人」で、読んでほしい内容を分けて説明するよ。

「復習する人」のための内容は、四角で囲っておくから参考にしてね！

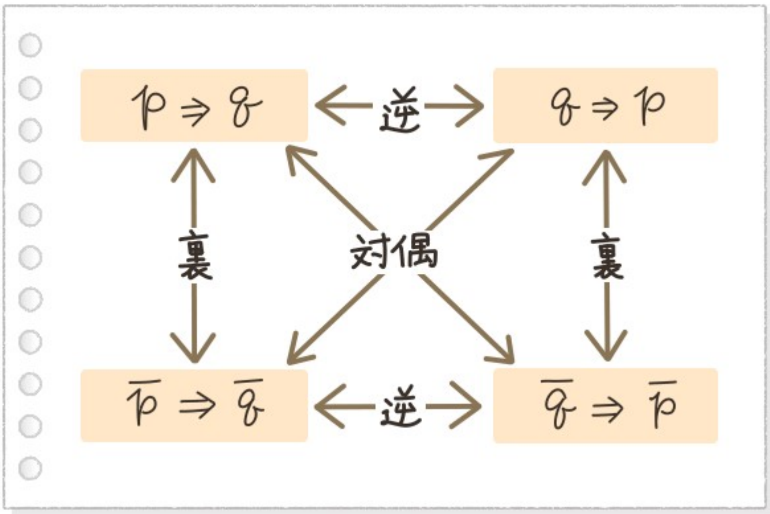
命題の逆・裏・対偶とは？

命題の逆・裏・対偶

教科書の説明

命題「p⇒q」と関連する命題を考えると、
命題「q⇒p」を命題「p⇒q」の逆
命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を命題「p⇒q」の裏
命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を命題「p⇒q」の対偶
という。
ある命題が真であっても、その命題の逆は真とは限らない。また、裏も真とは限らない。
命題「p⇒q」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」とは、真偽が一致する。

「逆」や「裏」は日常生活でも使う言葉だけど、「対偶（たいぐう）」というのは初めて聞いた言葉だよね。 図にすると、こうなるんだ。



これが「命題の逆・裏・対偶」の関係を図にしたものだよ。

この図の中の斜めの矢印で書かれている「対偶」という関係が、命題を証明するときに強力なパワーを発揮してくれるんだ！

今日は、この「対偶」を作れるようになって、そして「対偶」が持つ重要な鍵を理解するのが目標なんだ。

そのために、言葉をひとつずつ攻略していこう。

今日は、この２つの例を使って説明していくよ。

例１：「カラス⇒黒い」 例２：「４の倍数⇒２の倍数」

例１は、逆・裏・対偶を作ったときに、文章としてどんなふうになるかイメージしてもらうための例なんだ。

今回の説明では「カラスは必ず黒い」ということにしているよ。実際には他の色のカラスもいるかもしれないけど、ここでは「カラスは黒い」として読んでほしいんだ。

例２は、数学的な内容の代表として使っていくよ。

早速、この２つの命題の真偽を確認しておこう。

例１：「カラス⇒黒い」
　　カラスは必ず黒い。この命題は真である。

さっき言った通り、今回の説明ではカラスの色は黒としているので、例１の命題は真だと言えるね。

例２：「４の倍数⇒２の倍数」
　　そもそも４が２の倍数なので、その４を何倍かして作った４の倍数は当然２の倍数でもある。
　　この命題は真である。

例２も真だという事が分かったね。

それでは、「逆・裏・対偶」をひとつずつ攻略していこう！

命題の逆とは？

命題「p⇒q」の逆は、「q⇒p」

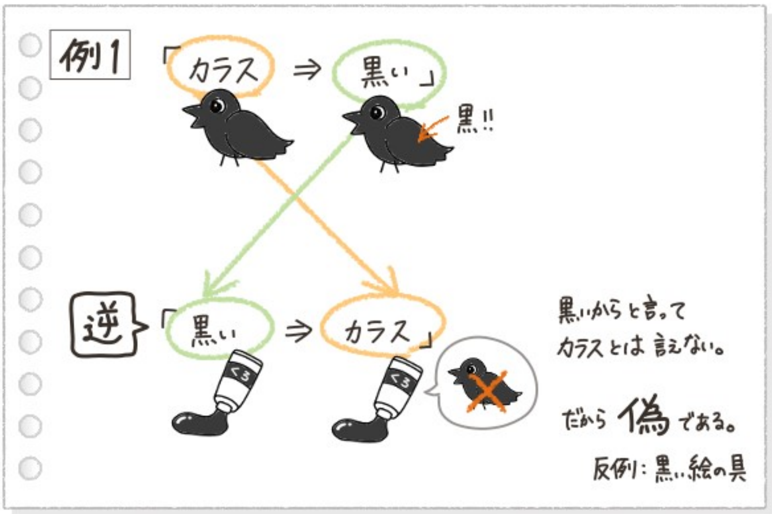
pとqの位置が逆になっているのが分かるかな？

言葉の通り、pとqの位置を逆にしたものが、命題の「逆」なんだ。

例１：「カラス⇒黒い」の逆は「黒い⇒カラス」
例２：「４の倍数⇒２の倍数」の逆は「２の倍数⇒４の倍数」

単純に、仮定と結論を逆にすると「逆」が作れるんだね。
仮定と結論という言葉も、大切な言葉だったね。

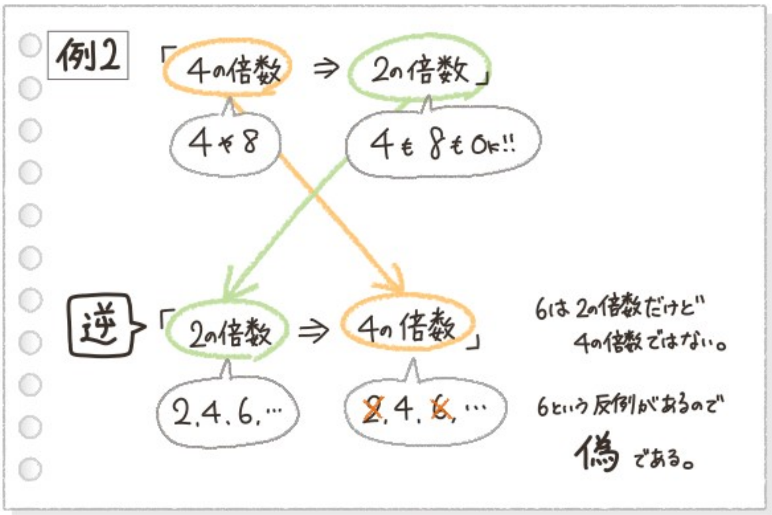
ここで注目してほしいのは、作った「逆」が真か？偽か？ってことなんだ。



例１では、「逆」の文章は、「黒いならば、カラスだ」となるけれど、黒いものはカラス以外にもたくさんあるよね。

例えば「黒い絵の具」は、黒いけれどもカラスではない。
つまり、「黒い絵の具」という反例があるから、例１の「逆」は偽ってことになるね。

例２についても見てみよう。



例２では、「逆」の命題「２の倍数ならば、４の倍数」に対して、６という反例があげられるね。
６は２の倍数だけれども、４の倍数ではないからね。
ってことで、例２の「逆」も、偽だと分かった。

例１と例２の結果から、元の命題が真であっても、その「逆」は真であるとは限らない、ということが分かったかな？

まずは「逆」を作れるようになることが第一歩だね。そして「逆」を作れたら、その真偽をチェックできるようになろう！

元の命題が真のとき、「逆」が真になる場合もあるよ！

例３：もとの命題「偶数⇒２の倍数」について、その逆は「２の倍数⇒偶数」

この例３場合は、元の命題が真で、その「逆」も真になっているでしょ？

さて、気づいたかな？

これは、前回の「命題と条件」のところで、「同値」の説明をしたときと同じ例なんだ！
※同値（どうち）とは、値（あたい）が同じこと。
偶数とは「２で割り切れる数」だから、「偶数」と「２の倍数」は同値だよ。

つまり、命題「p⇒q」において、pとqが同値ならば、その逆も真になるんだよ。

命題の裏とは？

命題「p⇒q」の裏は、「$\bar{p}$⇒$\bar{q}$」

「$\bar{p}$」という記号を覚えているかな？
「$\bar{p}$」というのは、「pではない」という意味だったね。ちなみに、読み方は「pバー」だったよ。

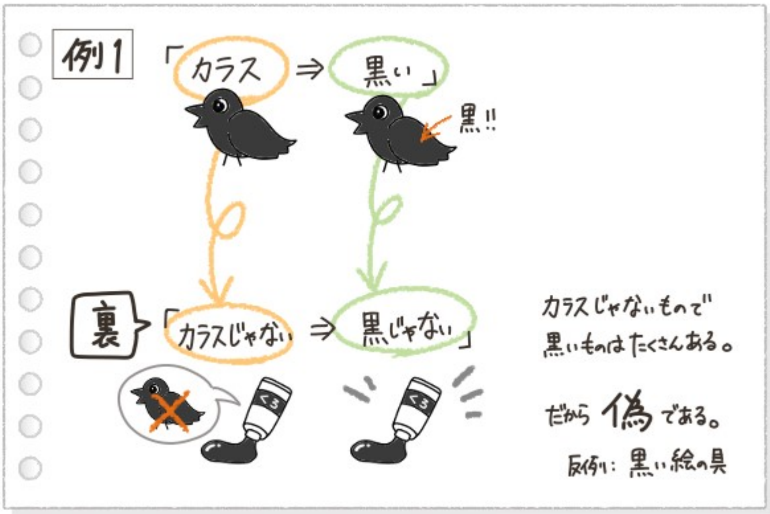
つまり、「裏」は、pとqの順番はそのままなんだけど、内容を「pではない」と「qではない」に変えるってことだね。

例１と例２の「裏」を作ってみると、こうなるよ。

例１：「カラス⇒黒い」の裏は「カラスじゃない⇒黒じゃない」
例２：「４の倍数⇒２の倍数」の裏は「４の倍数じゃない⇒２の倍数じゃない」

「裏」は、仮定と結論が言っていることを、それぞれ裏返しにして作るイメージだね。
順番は変わらずに、内容が裏返っているイメージを持つといいよ！

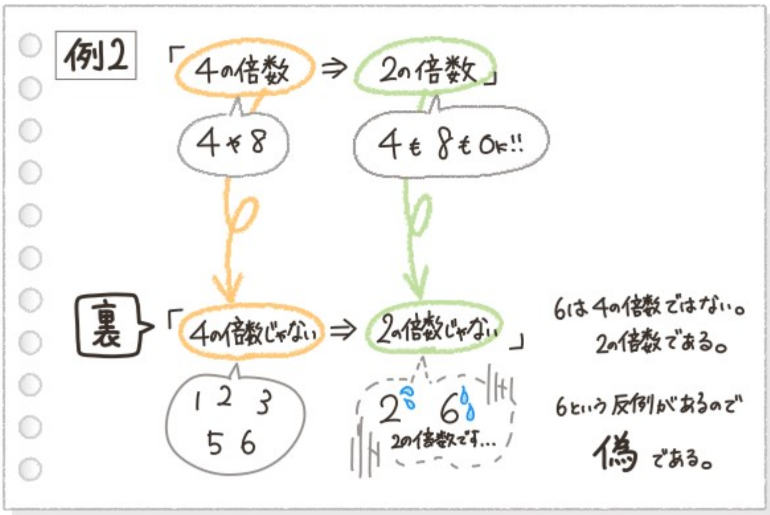
次に、この「裏」の真偽がどうなっているか確認してみよう。



例１では、「裏」の文章は「カラスじゃないならば、黒じゃない」となるけれど、カラスじゃなくても、黒いものはたくさんあるよね。

例えば「黒い絵の具」は、カラスじゃないもので、黒いものだといえる。
つまり、「黒い絵の具」という反例があるから、例１の「裏」は偽ってことになるね。

例２についても見てみよう。



例２では、「裏」の命題「４の倍数ではないならば、２の倍数ではない」に対して、６という反例があげられるね。
６は４の倍数じゃないけれど、２の倍数だよね。
ってことで、例２の「裏」も、偽だと分かった。

例１と例２の結果から、元の命題が真であっても、その「裏」は真であるとは限らない、ということが分かったね。

同値の場合はどうなるのかを確認しておこう。

例３：もとの命題「偶数⇒２の倍数」について、その裏は
「偶数ではない⇒２の倍数ではない」
つまり、「奇数⇒２の倍数ではない」

「偶数と奇数」のように、片方であることを否定すると、全部もう片方になるようなときは、
「偶数ではない」をもう一歩踏み込んで「奇数である」と書くよ。

そして、例３も、元の命題もその「裏」も、両方真だったね。

つまり、「逆」のときと同じように、命題「p⇒q」において、pとqが同値ならば、
その裏も真になるんだよ。

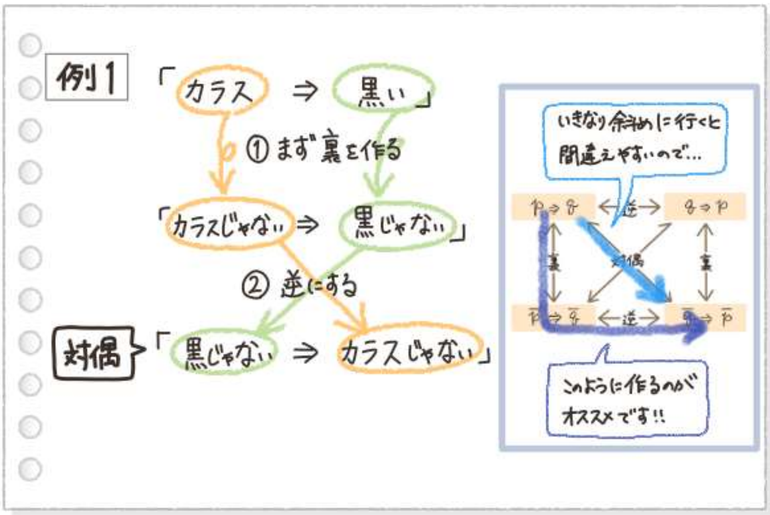
命題の対偶とは？

命題「p⇒q」の対偶は、「$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$」

いよいよ対偶の説明だね。
対偶を作る時は、２つのステップで作るといいよ。

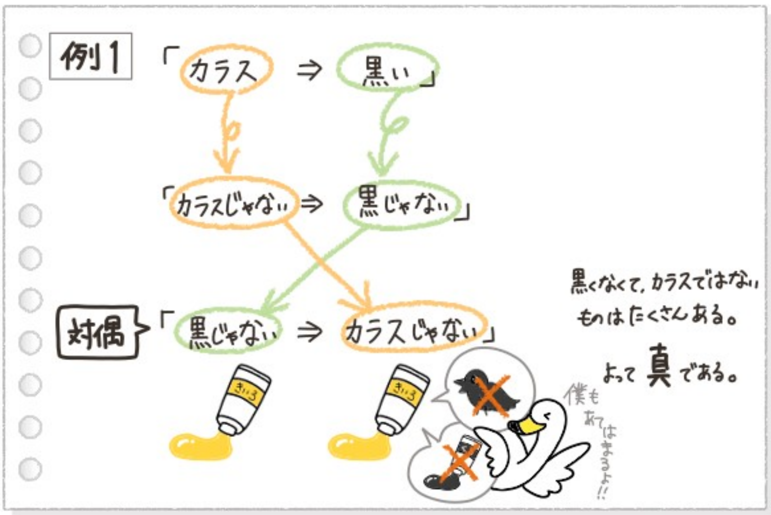
①元の命題の「裏」を作る
②作った「裏」を「逆」にする

具体的にやってみよう！



「逆」と「裏」を作る作業を両方すればいいんだね！ということは、先に「逆」をしてから「裏」をしてもいいのかな？
その通り、「逆」と「裏」を作る作業を両方行えばいいんだよ。

順番はどちらが先でも大丈夫だから、自分が考えやすい方で作るといいよ！
それでは、作った「対偶」が真か偽かを確認してみようか。



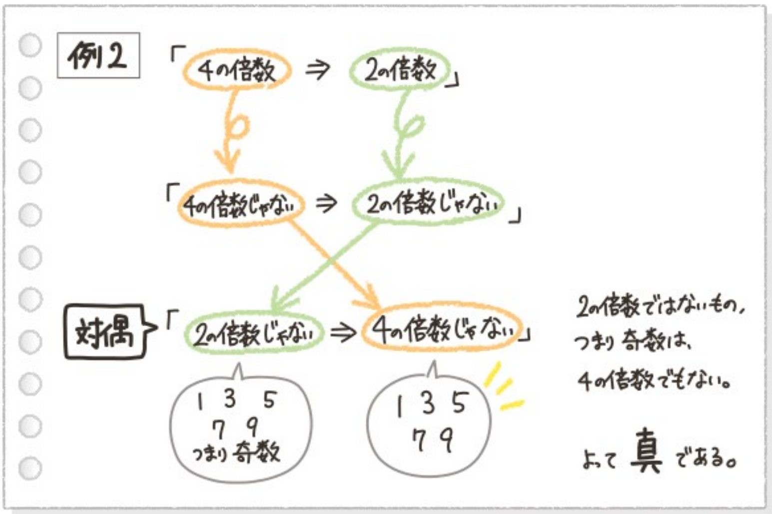
例1では、「対偶」の文章は「黒じゃないならば、カラスじゃない」となるね。黒くないもので、カラスでもないものはたくさんあるよね。

黄色い絵の具もそうだし、白鳥もあてはまるよね！

そして、今日の説明ではカラスは必ず黒いってことになっているので、黒くないならカラスではないと分かる。

つまり、例1の「対偶」は真だと言えるんだ。

例２についても見てみよう。



例２では、「対偶」の命題は「２の倍数でないならば、４の倍数ではない」となるね。

２の倍数ではないっていうことは、奇数だと言えるよね。

奇数はもちろん４の倍数ではない。だから「対偶」の文章「２の倍数でないならば、４の倍数ではない」は当然のことだ！といえる。

例２の「対偶」も、真だと言えたよ。

同値の場合も、対偶は真になるよ。

例３：もとの命題「偶数⇒２の倍数」について、
その対偶は「２の倍数ではない⇒偶数ではない」

つまり、「２の倍数ではない⇒奇数」

例３の元の命題もその「裏」も、両方真だよね。

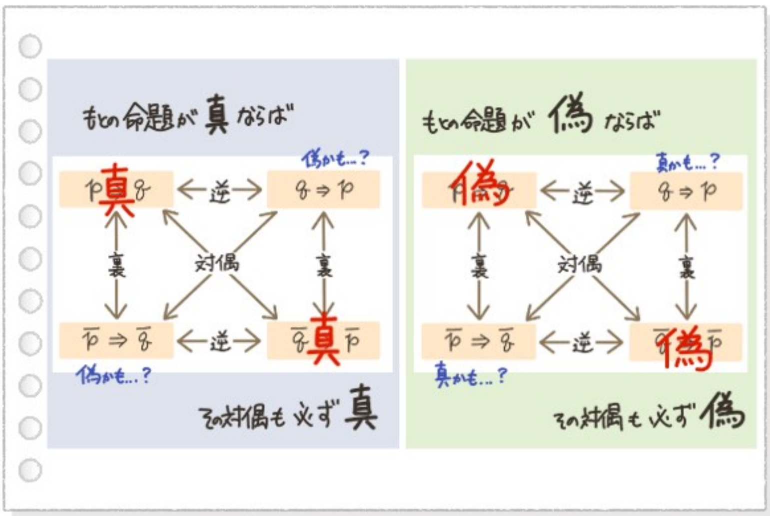
つまり、命題「p⇒q」において、pとqが同値ならば、
その対偶も真になるってことだ。

ここまでを振り返ると…「逆」と「裏」は偽になって、「対偶」だけは真になる、ってことかな？
それは正解ではあるんだけど、完全な正解とは言えないんだ。

もとの命題が真のとき、

・「逆」と「裏」は、真になるとは限らない（つまり、偽になるかもしれない）
・「対偶」は必ず真になる

これが完全な正解で、何より重要なのは、もとの命題の真偽と、対偶の真偽は一致するということなんだ！



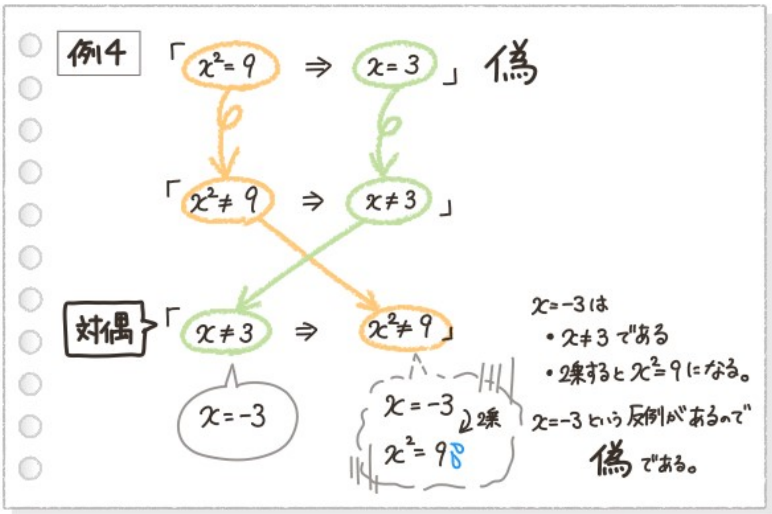
もとの命題が真ならば、その対偶は必ず真になるし、
元の命題が偽ならば、その対偶も必ず偽になるんだよ。

さっきの図の右側のように、もとの命題が偽の時、対偶がどうなるかを確かめておこう。

まず、真偽を確かめてみると偽になる、例４を用意するね。

例４：「$x^2=9 \Rightarrow x=3$」
$x^2=9$を解くと、$x=\pm 3$ だから、
$x=-3$ という反例があるため、この命題は偽である。

では、例４の「対偶」を作ってみよう。



例４では、「対偶」に対して、$x=-3$ という反例があげられるね。

$x=-3$ は、仮定である $x\neq 3$ を満たしていて、２乗すると $x^2=9$となるから、結論である $x^2\neq 9$を満たさない。

これで、もとの命題が偽であった例４では、その「対偶」も、偽だと分かったね。

命題の逆・裏・対偶　まとめ

「命題の逆・裏・対偶」について、今回学習したことをまとめたよ。

命題「p⇒q」の「逆」とは
・pとqの位置を逆にした、「q⇒p」がこの命題の「逆」
・もとの命題「p⇒q」が真であっても、その「逆」が真になるとは限らない

命題「p⇒q」の「裏」とは
・条件pを否定した と、条件qを否定した を考えて作る「 $\bar{p}\Rightarrow\bar{q}$ 」がこの命題の「裏」
・「pではない」と、pの内容を裏返しにしているイメージで覚えると良い
・もとの命題「p⇒q」が真であっても、その「裏」が真になるとは限らない

命題「p⇒q」の「対偶」とは

・①まず、「裏」を作る
②それを逆にする
という順番で作ると良い
・「pではないならば、qではない」という文章になる
・もとの命題「p⇒q」と、その対偶「 $\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$」の真偽は一致する。
つまり、もとの命題が真であれば、その対偶も真となり、
もとの命題が偽であれば、その対偶も偽となる。