

一次方程式とは？「解」と「等式の性質」を わかりやすく解説

方程式とは

方程式をひとことで言うと、「正体不明の文字が入っている等式」。

「等式」とは何かは、「文字式の利用」について解説しているページでも説明したね。そう、「=（イコール）」で結ばれた式のことだったね。つまり、 $○○ = ✕✕$ という形の式のこと。

この等式に、文字が入ったものを、まず「方程式」と呼ぶんだ。

教科書が言っている「 x の値によって、成り立ったり、成り立たなかったり」という部分は、つまりは「 x という文字が使われているよ」というイメージで考えてOK。

そうすると「 x という文字が使われている方程式を、 x についての方程式という」というごく当たり前のことを言っているだけだね。

「一次方程式」とは？

方程式がなにかは分かったけれど、では「一次方程式」ってなんだろう？

数学では、式の中で、掛け合わされている文字の個数のことを「次数」と呼ぶんだ。つまり、式の中に、文字が何個「かけられているか」の数。

たとえば、「 $x = 4$ 」という式だったら、「 x 」は1つだけだよ。これをちょっとややこしいけれど、「1つだけ”かけられている”」と考えてあげてね。

そうすると、この式は「一次」の式になるんだ。

では、「 $xy = 8$ 」という式はどうだろう。
「 x 」と「 y 」の2つの文字がかけられているね。
だから、これは「2次」の式だよ。

「 $x^2 = 16$ 」はどうか？

「 x^2 」は、「 x 」に「 x 」をかけたものだよね。

だから、2つの x （2つの文字）がかけられているから、これも「2次」の式だよ。

ここで注意したいのが、「 $x + y = 8$ 」というような式。

これも、2つの文字が登場しているから、「2次なのかな？」とってしまうよね。

でも、これは「 x 」と「 y 」は「かけられてはいない」よね。足されているだけ。

だから、これは「 x 」も「 y 」も、それぞれ「1つの文字がかけられている」と考えるから、「1次」の式なんだ。

そして、式の「次数」は、その式の中にある一番多い次数で呼ぶんだ。

たとえば、「 $x + xy = 12$ 」なんて式があったとするよ。

「 x 」は1次だね。「 xy 」は2次だよ。

そうすると、一番多い次数は「2次」だよ。

そのとき、この式は「2次の式」と呼ぶんだ。

たとえば「次数」のことは「レベル」だとイメージしてみて。

辛さレベルが「1～3」まであるカレー屋さんのメニューがあったとして、

「辛さレベル1のチキンカレーと辛さレベル3のエビカレー」のセットは、きみだったらどの辛さレベルのページに載せる？

辛さレベル「1」のページに載せるわけにはいかないよね。

より辛いほうの「レベル3」のページに載せるんじゃないかな？

数学でも、次数が多くなるほど複雑な式になるんだから、その式の中の一番多い次数で呼んでおこうね、ということなのかもしれないね。

1年生では、 x^2 とかがでてこない、最高次数が「1」の一次の方程式を学習するんだ。それが「一次方程式」だよ。

方程式の例題

さて、方程式のことは分かったけれど、じゃあ、結局「方程式で何するの？」ってなるよね。

これからの学習では、「方程式を解く」ということをするんだ。

方程式は、文字が使われている等式だよな。

文字って、いくつの数字なのか、正体が不明だよな。

その文字の正体を見つけちゃおう！！ということ。

例えば、次の問題を考えてみよう。

(例1) 方程式 $x + 4 = 5$ は、 x にいくつを入れると成り立つかな？

ぱっとわかる人はいいんだけど、わからない人は x に順番に数字を入れてみよう。 x に 0 ~ 4 まで入れてみたよ。左辺と右辺の値が同じになる（これを「方程式が成り立つ」というよ）のは、 x がいくつのときかな？

xの値	左辺 $x+4$	大小関係	右辺 5
$x=0$	$0+4=4$	$<$	5
$x=1$	$1+4=5$	$=$	5
$x=2$	$2+4=6$	$>$	5
$x=3$	$3+4=7$	$>$	5

上の表から、 x が 1 のとき、左辺と右辺が同じになって、方程式が成り立つね。

方程式の解とは

方程式を成り立たせることができる、 x の正体「1」を見つけることができたね。

この、方程式を成り立たせる x の値を方程式の解（かい）というよ。

「解」は、「問題の答え」という意味があるよ。
つまり、方程式の「答え（文字の正体）」ということだね。

方程式 $x + 4 = 5$ の解は $x = 5$ になるよ。

（例2）方程式 $x - 5 = -3$ の解を求めなさい。

ぱっとわかる人はいいんだけど、わからない人は x に順番に数字を代入してみよう。 x に $0 \sim 4$ まで代入してみたよ。左辺と右辺の値が同じになるのは、 x がいくつのときかな？

xの値	左辺 $x-5$	大小関係	右辺 -3
$x=0$	$0-5=-5$	$>$	-3
$x=1$	$1-5=-4$	$>$	-3
$x=2$	$2-5=-3$	$=$	-3
$x=3$	$3-5=-2$	$<$	-3
$x=4$	$4-5=-1$	$<$	-3

上の表から $x = 2$ のときに、左辺と右辺が等しくなるから、 $x = 2$ が解になることがわかるね。

こんな感じで方程式の解を求めることを、方程式を解（と）くっていうよ。

(例3) 方程式 $2x - 4 = x$ を解きなさい。

この問題は、さすがにぱっとわかる人は少ないんじゃない？今までの2問と何が違うかっていうと、右辺にも「 x 」があるってことだね。

だから下の表で考えてみよう。

xの値	左辺 $2x-4$	大小関係	右辺 x
$x=0$	$2 \times 0 - 4 = -4$	$<$	0
$x=1$	$2 \times 1 - 4 = -2$	$<$	1
$x=2$	$2 \times 2 - 4 = 0$	$<$	2
$x=3$	$2 \times 3 - 4 = 2$	$<$	3
$x=4$	$2 \times 4 - 4 = 4$	$=$	4

上の表から $x = 4$ のときに、左辺と右辺が等しくなるから、 $x = 4$ が解になることがわかるね。

方程式で出てくる用語

方程式では次の言葉が出てきたよ。もう一度しっかり確認して覚えよう。

方程式で出てくる用語

①方程式

- ・ x の値によって、成り立ったり、成り立たなかったりする式のこと
- ・ 「方」は「左右」、「程」は「大小の比較」という意味があるため、「方程」とは左右をの大小の比較をすることが由来になっているよ。

②一次方程式

- ・ 文字(x など)の最高次数が「1」である方程式
- ・ 1年生で学習する方程式
※3年生で、二次方程式っていうのを勉強するよ。 ($x^2 + 3x + 2 = 0$)

③方程式の解

- ・ 方程式を成り立たせる x の値のこと
- ・ 方程式の左辺と右辺の値を等しくする x の値

④方程式を解く

- ・ 方程式の解を求めること

方程式の練習問題

方程式の基本がわかったところで練習問題を2問やってみよう。

(問1) 方程式 $2x + 5 = 11$ の解は1、2、3のうちどれか。

$2x + 5 = 11$ に、 $x = 1, 2, 3$ を順番に代入してみればよいよね。

$x = 1$ のときを考えよう。

(左辺) $= 2 \times 1 + 5 = 7$ (右辺) $= 11$ \rightarrow 7と11だから違うな。

$x = 2$ のときを考えよう。

(左辺) $= 2 \times 2 + 5 = 9$ (右辺) $= 11$ \rightarrow 9と11だから違うな。

$x = 3$ のときを考えよう。

(左辺) $= 2 \times 3 + 5 = 11$ (右辺) $= 11$ \rightarrow 両方11だ!ということは $x = 3$ が解だね。

(問2) 次のア～エの方程式のうち、解が -2 であるものはどれかな？

$$\text{ア} : 3x + 2 = 8 \qquad \text{イ} : x - 5 = 3$$

$$\text{ウ} : -2x = 4 \qquad \text{エ} : 2x - 3 = x - 1$$

ア～エの方程式に $x = -2$ を代入していけばいいよね。

答えを先にいうと・・・ウが正解だよ。他のやつは $x = -2$ では等式が成り立たないよ。実際に代入して確かめてみよう。

ア： $3x + 2 = 8$ に $x = -2$ を代入しよう。

$$\text{(左辺)} = 3x + 2$$

$$= 3 \times x + 2$$

$$= 3 \times (-2) + 2 \quad \leftarrow \text{マイナスを代入するときは () をつけよう}$$

$$= -6 + 2$$

$$= -4$$

$$\text{(右辺)} = 8$$

→ -4 と 8 だから違うな。

イ： $x - 5 = 3$ に $x = -2$ を代入しよう。

$$\text{(左辺)} = x - 5$$

$$= (-2) - 5$$

$$= -7$$

$$\text{' (右辺)} = 3$$

→ -7 と 3 だから違うな。

ウ： $-2x = 4$ に $x = -2$ を代入しよう。

$$\text{(左辺)} = -2x$$

$$= -2 \times x$$

$$= -2 \times (-2)$$

$$= 4$$

$$\text{(右辺)} = 4$$

→両辺が 4 になったから、この問題は解が -2 になる。

エ： $2x - 3 = x - 1$ に $x = -2$ を代入しよう。

$$\text{(左辺)} = 2x - 3$$

$$= 2 \times x - 3$$

$$= 2 \times (-2) - 3$$

$$= -4 - 3$$

$$= -7$$

$$\text{(右辺)} = x - 1$$

$$= (-2) - 1$$

$$= -3$$

→ -7 と -3 で違うな。

なんか方程式っていちいち代入するから面倒だなあ。と思ってしまうよね。
実はもっと簡単に解を求める方法があるんだ。

その方法は次の「方程式の解き方」を解説するページで説明するんだけど、その学習をする前に、「等式の性質」のことを知っておく必要があるんだ。

等式の性質とは

方程式を簡単に解くために、必要な知識が「等式の性質」。

等式の性質は次の通りだよ。

等式の性質

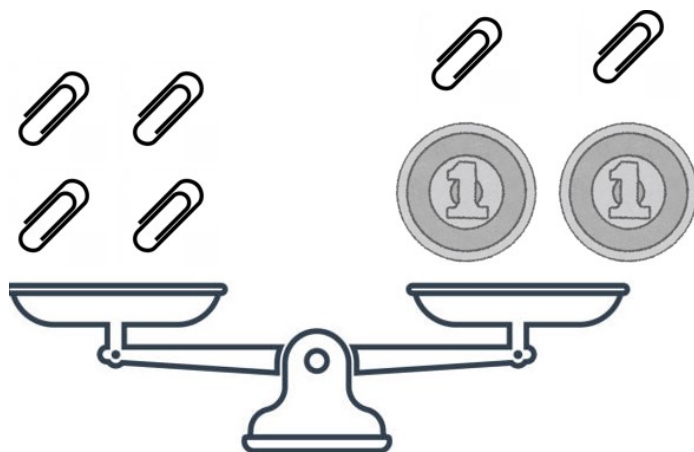
「等式は左辺・右辺の両方に同じ数を「たしても・ひいても・かけても・わっても」、等式は成り立ったまま。」

等式の性質が成り立つ理由

等式の性質はそのまま覚えてしまえばいいのだけれど、なんでそうなるのか理由も考えてみよう。

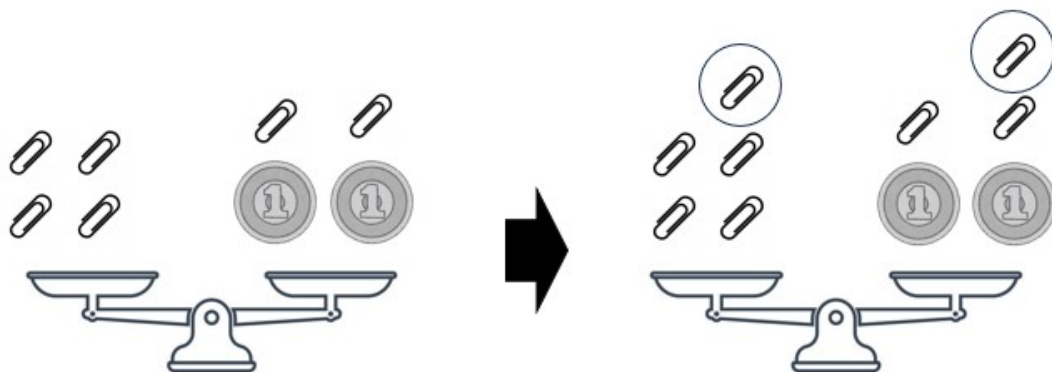
1円玉とクリップの重さをてんびんで考えてみよう。下のようになっていたら、「クリップ4個」＝「1円玉2枚とクリップ2個」の重さは等しいってことだよな。

式にしたら、「4クリップ＝1円2枚＋2クリップ」みたいな感じ。



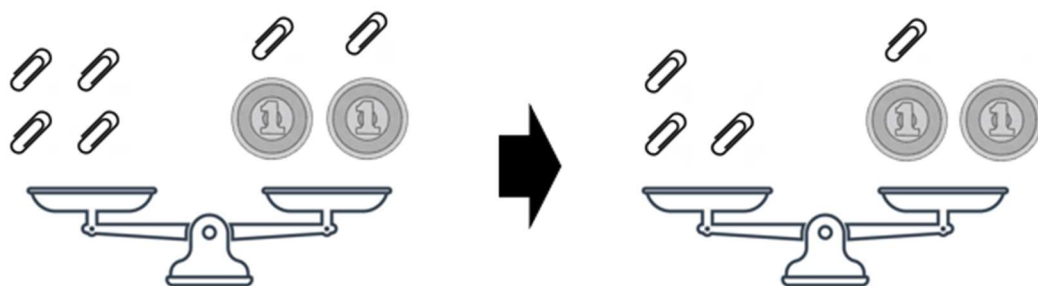
左辺・右辺の両方に同じ数を「たしても」よい理由

てんびんの両方にクリップ1枚を置くよ。左右の重さが変わらないことがわかる？当たり前だよね。両方に同じものを乗っているんだから。



左辺・右辺の両方に同じ数を「ひいても」よい理由

じゃあ、両方からクリップ1枚を減らすよ。左右の重さが変わらないことがわかる？同じ重さのものを左右から取っているから、重さは変わらないよね。

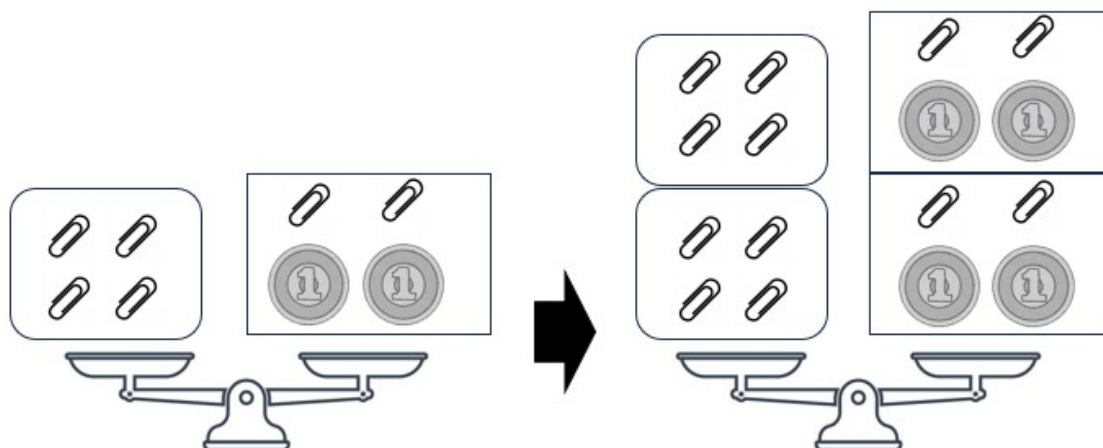


左辺・右辺の両方に同じ数を「かけても」よい理由

じゃあ、両方を2倍してみると、

左はクリップ4個だから8個になるよ。

右はクリップ2個と1円2枚だから、クリップ4個と1円4枚になるよ。



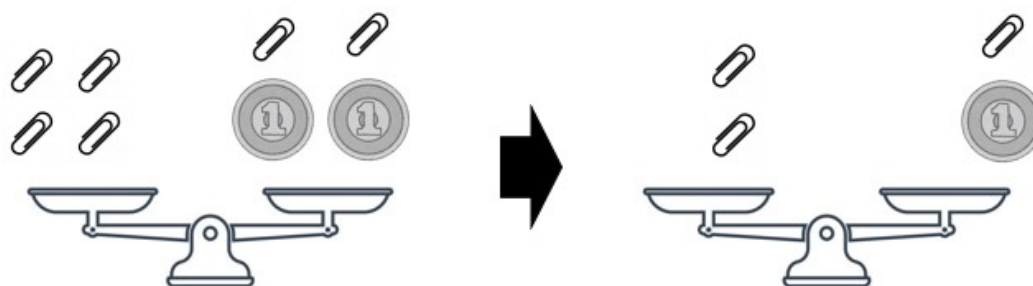
左の図で○と□が等しいから、右の図で○○と□□は等しくなることがわかるかな？

左辺・右辺の両方に同じ数を「わっても」よい理由

両方を2で割ってみるよ。

左はクリップ4個だから2個になるね。

右はクリップ2個と1円2枚だから、クリップ1個と1円1枚になるね。



等式の性質のまとめ

等式の性質

等式は左辺・右辺の両方に同じ数を「たしても・ひいても・かけても・わっても」、等式は成り立ったまま。

きちんとした教科書通りの表現で書いたら次の通りになるよ。

①等式の両辺に同じ数や式 m を加えても、等式は成り立つ。

$$A=B \text{ ならば、} A+m=B+m$$

②等式の両辺から同じ数や式 m を引いても、等式は成り立つ。

$$A=B \text{ ならば、} A-m=B-m$$

③等式の両辺に同じ数 m をかけても、等式は成り立つ。

$$A=B \text{ ならば、} Am=Bm$$

④等式の両辺を同じ数 m (m は 0 でない) で割っても、等式は成り立つ。

$$A=B \text{ ならば、} A \div m = B \div m$$

まとめ

- ・ x の値によって、成り立ったり、成り立たなかったりする式のことを x についての方程式という。
- ・ 方程式を成り立たせる x のことを、方程式の解といい、解を求めることを方程式を解くという。
- ・ 方程式の解を求めるには、 x に数を代入して、等式が成り立つかを調べればよい。
- ・ 等式の性質を使うことで、簡単に方程式の解を求められる。
- ・ 等式は左辺・右辺の両方に同じ数を「たしても・ひいても・かけても・わっても」、等式は成り立ったまま。