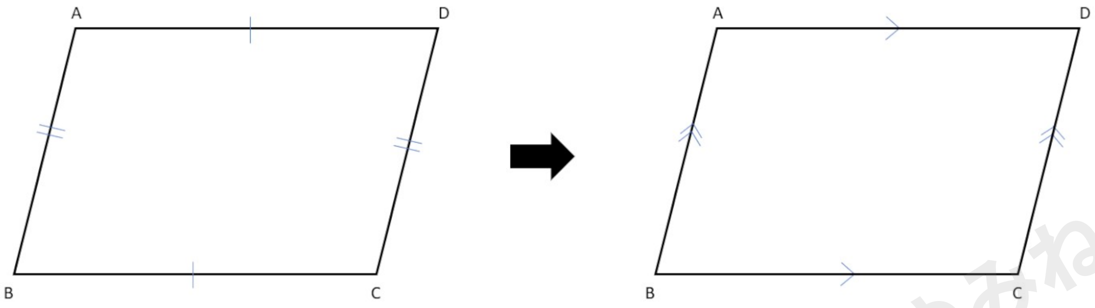
平行四辺形になるための条件５つとは？
証明問題の解き方を解説

「平行四辺形では、２組の対辺はそれぞれ等しい」の逆を証明してみよう

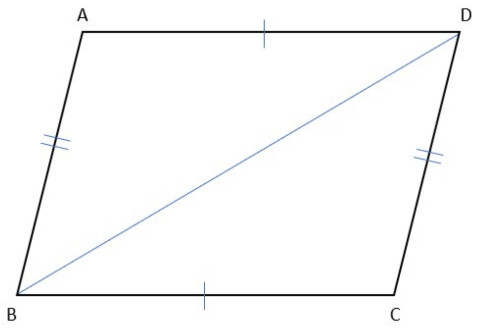
二等辺三角形になるための条件を確かめた時のように、平行四辺形でも同じように定理の「逆」が正しいことを証明して「平行四辺形になるための条件」を確認しよう！

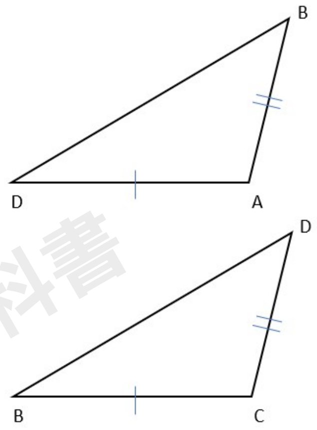
まずは「平行四辺形では、２組の対辺はそれぞれ等しい」ことの逆の「２組の対辺がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

仮定は「四角形の２組の対辺はそれぞれ等しい（AB＝DC、AD＝BC）」となるよ。
結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である
「２組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。
※２辺が平行であることを証明するには、錯角や同位角が等しいことを証明すれば良かったよね。



今回の証明では下の図のように四角形ABCDの頂点BとDを結んで、∠ADBと∠CBD、∠ABDと∠CDBが等しくなることを証明していこう。





△ADBと△CBDにおいて
仮定から
AB＝CD・・・①
DA＝BC・・・②
また、BDは共通・・・③
①、②、③より、
３組の辺がそれぞれ等しいから
△ADB≡△CBD
合同な図形の対応する辺は等しいから
∠ADB＝∠CBD、∠ABD＝∠CDB
錯角が等しいから
AD∥CB、AB∥DC
２組の対辺がそれぞれ平行だから
四角形ABCDは平行四辺形である。

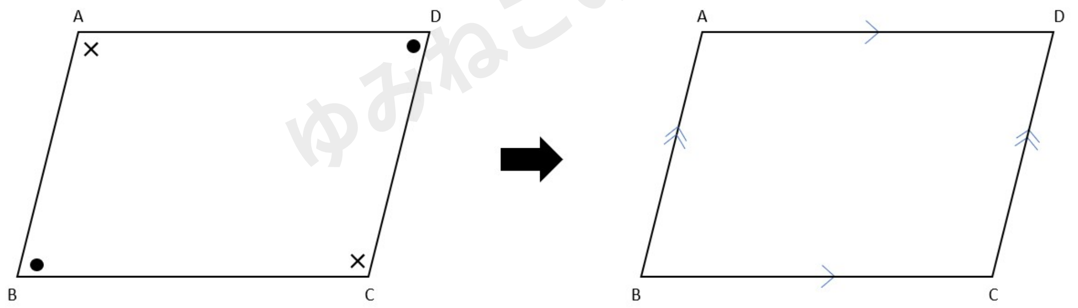
「２組の対辺がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

つまり、「２組の対辺がそれぞれ等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

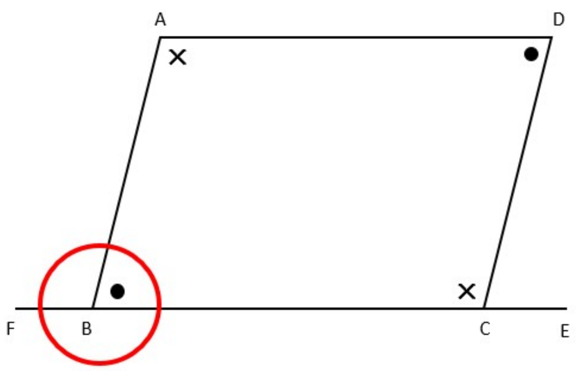
「平行四辺形では、２組の対角はそれぞれ等しい」の逆を証明してみよう

次に「平行四辺形では、２組の対角はそれぞれ等しい」ことの逆の「２組の対角がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

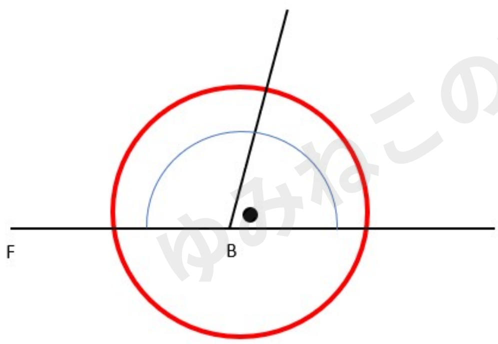
仮定は「四角形の２組の対角はそれぞれ等しい（∠DAB＝BCD、∠ABC＝∠CDA）」となるよ。
結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である
「２組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。



この証明は三角形は使わずに、四角形の内角の和や一直線が作る角を使って証明していくよ。



２●＋２×＝３６０°
●＋　×＝１８０°



∠FBA＋∠ABC＝１８０°
∠FBA＋　●　＝１８０°

辺BCの延長線上に点Fをとって証明していくよ。

四角形の内角の和は、３６０°だから

∠DAB＋∠ABC＋∠BCD＋∠CDA＝３６０°

仮定から、∠DAB＝BCD、∠ABC＝∠CDAであるから

∠DAB＋∠DAB＋∠ABC＋∠ABC＝３６０°

したがって、∠DAB＋∠ABC＝１８０°・・・①

（上の左側の図と合わせて確認しよう）

また、一直線が作る角は１８０°となるので、

∠FBA＋∠ABC＝１８０°・・・②

（上の図の赤い丸で囲った部分と合わせて確認しよう）

①、②から∠DAB＝∠FBA・・・③

錯角が等しいから

AD∥BC・・・④

仮定の∠DAB＝∠BCDと③より

∠FBA＝∠BCD

同位角が等しいから

AB∥DC・・・⑤

④、⑤より、２組の対辺がそれぞれ平行だから

四角形ABCDは平行四辺形である。

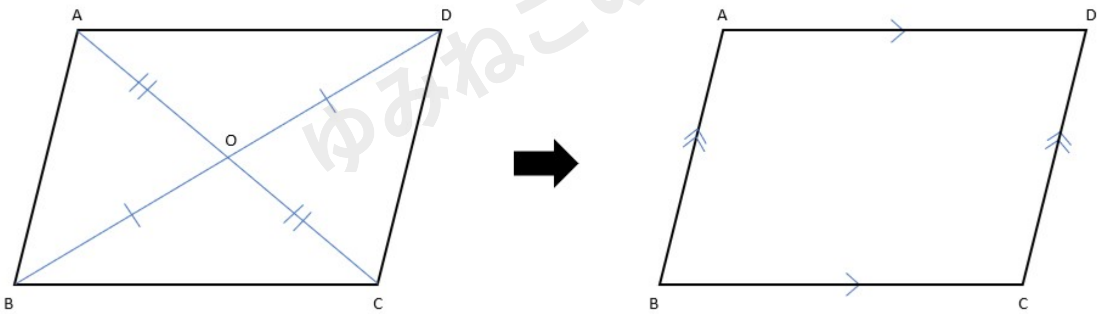
「２組の対角がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

つまり、「２組の対角がそれぞれ等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

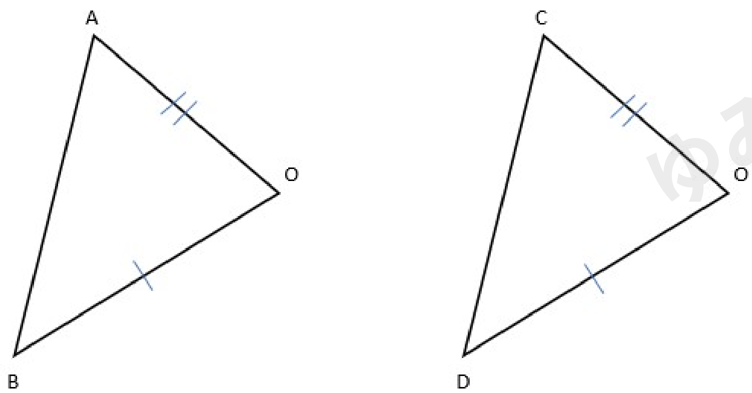
「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる」の逆を証明してみよう

「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる」ことの逆の「対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

仮定は「四角形の対角線はそれぞれの中点で交わる（AO＝CO、BO＝DO）」となるよ。
結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である「２組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。



この証明では、∠ABOと∠CDO、∠DAOと∠BCOが等しくなることを証明していくよ。
まずは、△AOBと△CODが合同であることを証明して、∠ABOと∠CDOが等しくなることを証明しよう。



△AOBと△CODにおいて
仮定から
AO＝CO・・・①
BO＝DO・・・②
また、対頂角は等しいので
∠AOB＝∠COD・・・③
①、②、③より
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△AOB≡△COD
合同な図形の対応する角は等しいから
∠ABO＝∠CDO
錯角が等しいので、
AB∥CD
同様にして、
△AOD≡△COBより
合同な図形の対応する角は等しいから
∠DAO＝∠BCO
錯角が等しいので、
AD∥BC
２組の対辺がそれぞれ平行だから、四角形ABCDは平行四辺形である。

※この証明で出てきた「同様にして」という言葉は、同様な手順で証明できる場合に使うことができるよ。

「対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

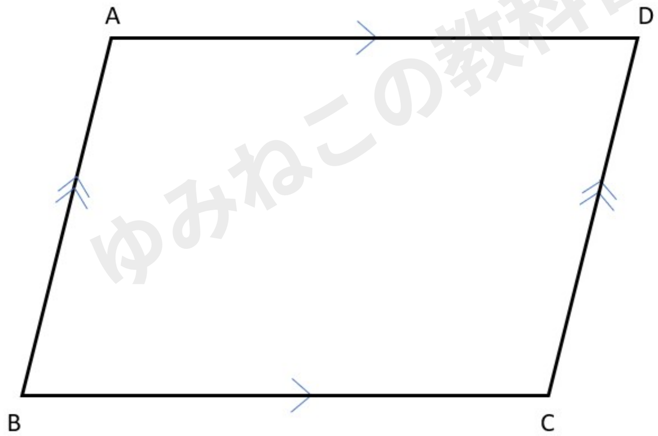
つまり、「対角線がそれぞれの中点で交わる」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

平行四辺形になるための条件

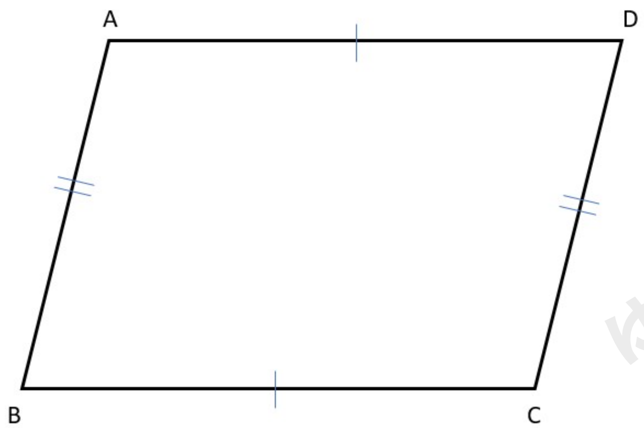
四角形が平行四辺形になるための条件は、平行四辺形の「定義」や「定理」、そして平行四辺形の性質の逆が正しいと証明できたものをまとめて、次のとおりになるよ。

平行四辺形になるための条件

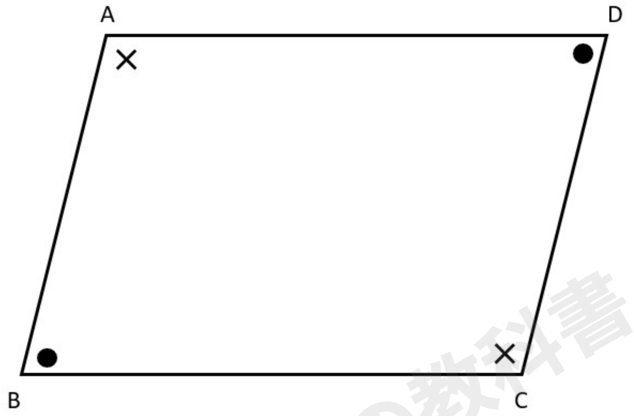
・２組の対辺がそれぞれ平行である。



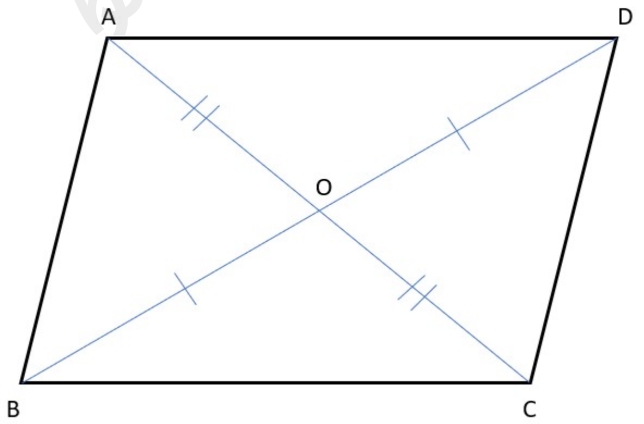
・２組の対辺がそれぞれ等しい。



・２組の対角がそれぞれ等しい。



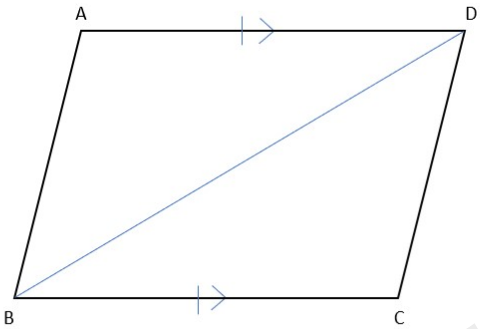
・対角線がそれぞれの中点で交わる。

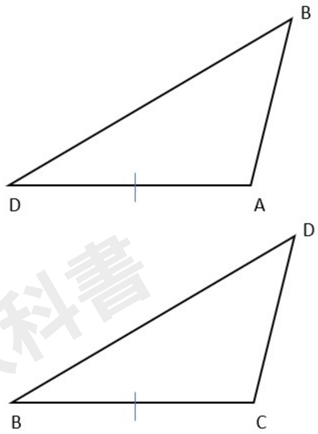


また、定理では出てこなかったもので、もう１つ平行四辺形になる条件があるから紹介するね。

それは、「１組の対辺が平行でその長さが等しい」という条件なんだ。
実際に証明して確認していこう。

下の図のように四角形ABCDの頂点BとDを結んで、∠ABDと∠CDBが等しくなることを証明していこう。



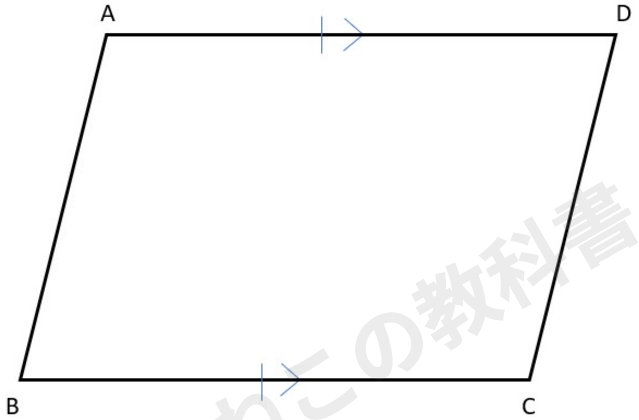


△ABDと△CDBにおいて
仮定から
AD＝CB・・・①
BDは共通・・・②
AD∥CBより、平行線の錯角は等しいから
∠ADB＝∠CBD・・・③
①、②、③より
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABD≡△CDB
合同な図形の対応する角は等しいから
∠ABD＝∠CDB
錯角が等しいので、
AB∥DC
AD∥CB、AB∥DCより
２組の対辺がそれぞれ平行だから、四角形ABCDは平行四辺形である。

このように証明できるから、「１組の対辺が平行でその長さは等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

平行四辺形になるための条件

・１組の対辺が平行でその長さが等しい。

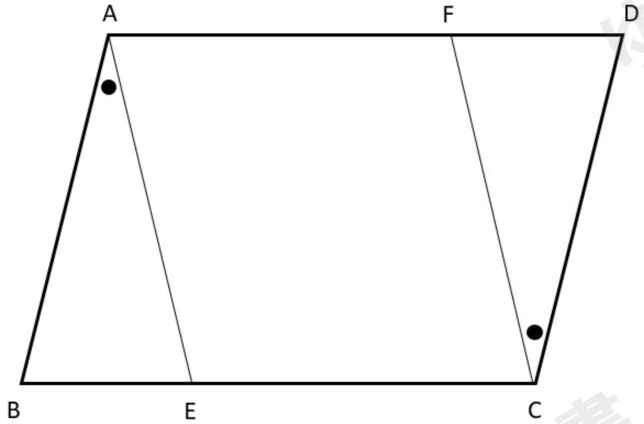


平行四辺形になるための５つの条件は、テストにもよく出題されるから確実に覚えておこう。

平行四辺形になるための条件を使った証明問題

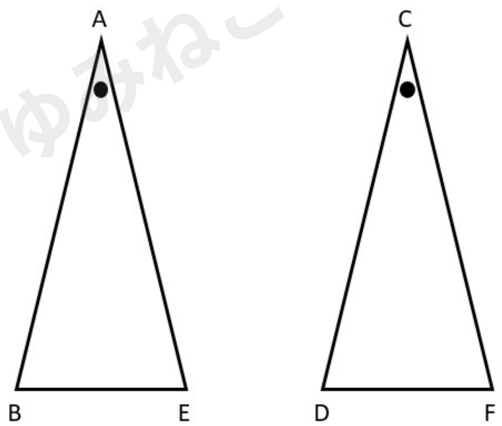
平行四辺形になるための条件を使った証明問題にチャレンジしよう。

問題
平行四辺形ABCDの辺BC、AD上に２点E、Fをとります。
この時、∠BAE＝∠DCFならば、四角形AECFが平行四辺形となることを
証明しなさい。



①仮定と結論を問題文から見つけよう。
仮定
∠BAE＝∠DCF
四角形ABCDが平行四辺形である
結論
四角形AECFが平行四辺形

結論は簡単に見つけることができるけれど、平行四辺形になるためのどの条件を使うか迷ってしまうね。
今回は、「２組の対辺がそれぞれ等しい」を使って証明していこう。
そのために、△ABEと△CDFの合同を証明していくよ。



②仮定からわかることを書こう。
四角形ABCDが平行四辺形だから、
AB＝CD（平行四辺形の対辺が等しいから）
∠ABE＝∠CDF（平行四辺形の対角が等しいから）
を使うことができるよ。

証明
△ABEと△CDFにおいて
仮定から、
∠BAE＝∠DCF・・・①
平行四辺形の対辺は等しいので、
AB＝CD・・・②
また、平行四辺形の対角は等しいので、
∠ABE＝∠CDF・・・③
①、②、③より
１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△CDF
合同な図形の対応する辺は等しいので
AE＝CF・・・④
BE＝DF・・・⑤
平行四辺形の対辺は等しいので、
AD＝BC・・・⑥
⑤、⑥より
AD－DF＝BC－BE
よって、
AF＝EC・・・⑦
④、⑦から２組の対辺がそれぞれ等しいので、
四角形AECFは平行四辺形となる。

今回の問題のように、ひき算を使って辺や角が等しいことを証明することがあるから覚えておこう。

「平行四辺形になるための条件」まとめ

・平行四辺形になるための条件は全部で５つある。
①２組の対辺がそれぞれ平行である。
②２組の対辺がそれぞれ等しい。
③２組の対角がそれぞれ等しい。
④対角線がそれぞれの中点で交わる。
⑤１組の対辺が平行でその長さが等しい。