

# 平行四辺形になるための条件5つとは？

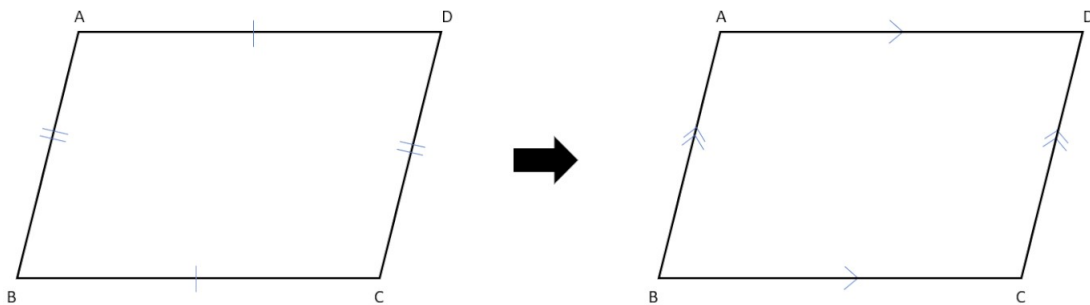
## 証明問題の解き方を解説

「平行四辺形では、2組の対辺はそれぞれ等しい」の逆を証明してみよう

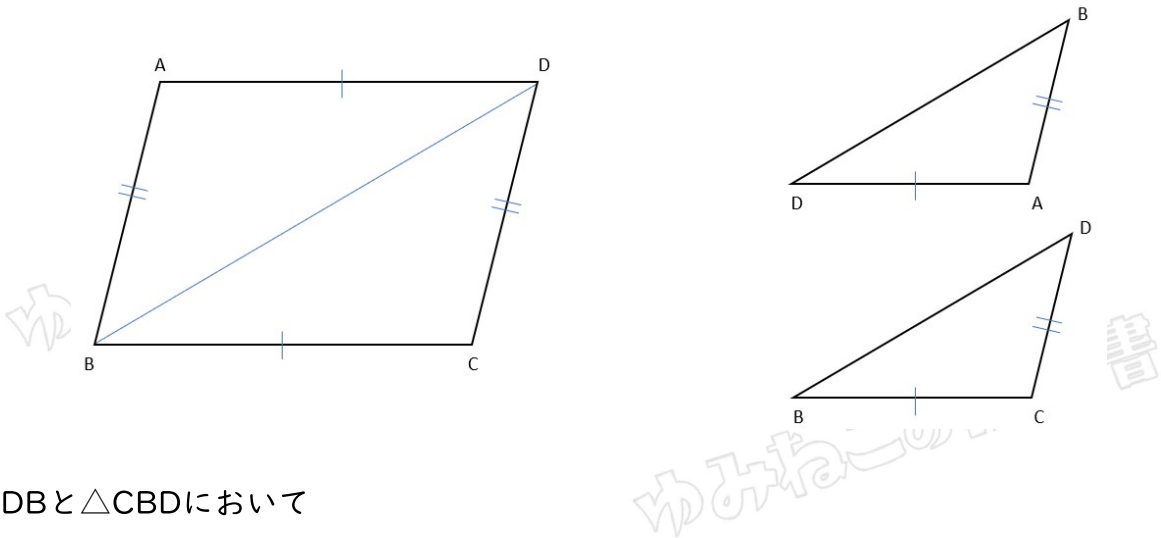
二等辺三角形になるための条件を確かめた時のように、平行四辺形でも同じように定理の「逆」が正しいことを証明して「平行四辺形になるための条件」を確認しよう！

まずは「平行四辺形では、2組の対辺はそれぞれ等しい」ことの逆の「2組の対辺がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

仮定は「四角形の2組の対辺はそれぞれ等しい ( $AB=DC$ 、 $AD=BC$ )」となるよ。  
 結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である  
 「2組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。  
 ※2辺が平行であることを証明するには、錯角や同位角が等しいことを証明すれば良かったよね。



今回の証明では下の図のように四角形ABCDの頂点BとDを結んで、 $\angle ADB$ と $\angle CBD$ 、 $\angle ABD$ と $\angle CDB$ が等しくなることを証明していこう。



$\triangle ADB$ と $\triangle CBD$ において

仮定から

$$AB = CD \dots \textcircled{1}$$

$$DA = BC \dots \textcircled{2}$$

また、BDは共通 $\dots \textcircled{3}$

①、②、③より、

3組の辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADB \equiv \triangle CBD$$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$$\angle ADB = \angle CBD, \angle ABD = \angle CDB$$

錯角が等しいから

$$AD \parallel CB, AB \parallel DC$$

2組の対辺がそれぞれ平行だから

四角形ABCDは平行四辺形である。

「2組の対辺がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

つまり、「2組の対辺がそれぞれ等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。



## 「平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい」の逆を証明してみよう

次に「平行四辺形では、2組の対角はそれぞれ等しい」ことの逆の「2組の対角がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

仮定は「四角形の2組の対角はそれぞれ等しい ( $\angle DAB = \angle BCD$ 、 $\angle ABC = \angle CDA$ )」となるよ。  
 結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である「2組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。

この証明は三角形は使わずに、四角形の内角の和や一直線が作る角を使って証明していくよ。

$$2\bullet + 2X = 360^\circ$$

$$\bullet + X = 180^\circ$$

$$\angle FBA + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle FBA + \bullet = 180^\circ$$



辺BCの延長線上に点Fをとって証明していくよ。

四角形の内角の和は、 $360^\circ$  だから

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$$

仮定から、 $\angle DAB = \angle BCD$ 、 $\angle ABC = \angle CDA$ であるから

$$\angle DAB + \angle DAB + \angle ABC + \angle ABC = 360^\circ$$

$$\text{したがって、}\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ \dots \textcircled{1}$$

(上の左側の図と合わせて確認しよう)

また、一直線が作る角は $180^\circ$  となるので、

$$\angle FBA + \angle ABC = 180^\circ \dots \textcircled{2}$$

(上の図の赤い丸で囲った部分と合わせて確認しよう)

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ から } \angle DAB = \angle FBA \dots \textcircled{3}$$

錯角が等しいから

$$AD \parallel BC \dots \textcircled{4}$$

仮定の $\angle DAB = \angle BCD$ と $\textcircled{3}$ より

$$\angle FBA = \angle BCD$$

同位角が等しいから

$$AB \parallel DC \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ より、2組の対辺がそれぞれ平行だから

四角形ABCDは平行四辺形である。

「2組の対角がそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

つまり、「2組の対角がそれぞれ等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

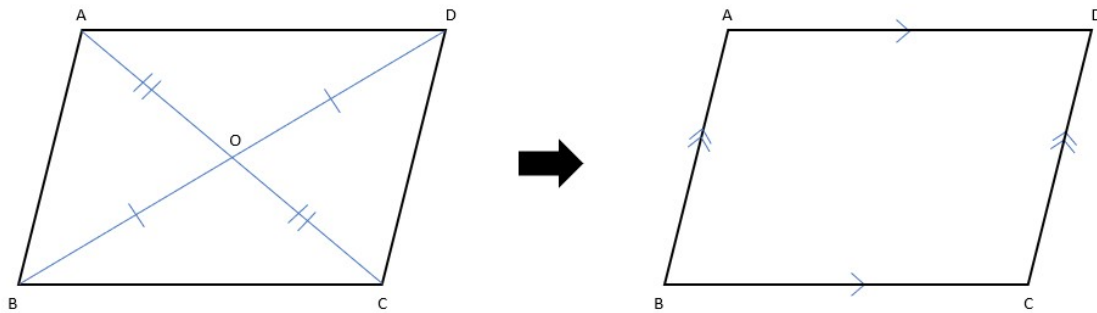


## 「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる」の逆を証明してみよう

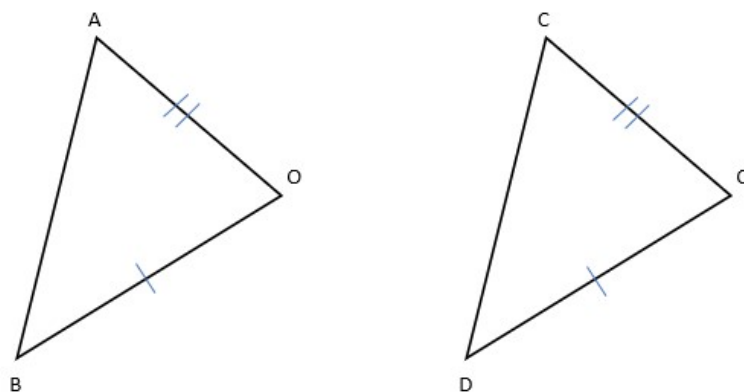
「平行四辺形では、対角線はそれぞれの中点で交わる」ことの逆の「対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は、平行四辺形である」を証明しよう。

仮定は「四角形の対角線はそれぞれの中点で交わる ( $AO=CO$ 、 $BO=DO$ )」となるよ。

結論である「平行四辺形」ということを証明するというのは、定義である「2組の対辺が平行」が成り立つことを証明すれば良いということだよ。



この証明では、 $\angle ABO$ と $\angle CDO$ 、 $\angle DAO$ と $\angle BCO$ が等しくなることを証明していくよ。まずは、 $\triangle AOB$ と $\triangle COD$ が合同であることを証明して、 $\angle ABO$ と $\angle CDO$ が等しくなることを証明しよう。



$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ において

仮定から

$$AO=CO \dots \textcircled{1}$$

$$BO=DO \dots \textcircled{2}$$

また、対頂角は等しいので

$$\angle AOB = \angle COD \dots \textcircled{3}$$

①、②、③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD$$

合同な図形の対応する角は等しいから

$$\angle ABO = \angle CDO$$

錯角が等しいので、

$$AB \parallel CD$$

同様にして、

$$\triangle AOD \equiv \triangle COB$$
より

合同な図形の対応する角は等しいから

$$\angle DAO = \angle BCO$$

錯角が等しいので、

$$AD \parallel BC$$

2組の対辺がそれぞれ平行だから、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

※この証明で出てきた「同様にして」という言葉は、同様な手順で証明できる場合に使うことができるよ。

「対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は、平行四辺形である」を証明することができたね。

つまり、「対角線がそれぞれの中点で交わる」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。

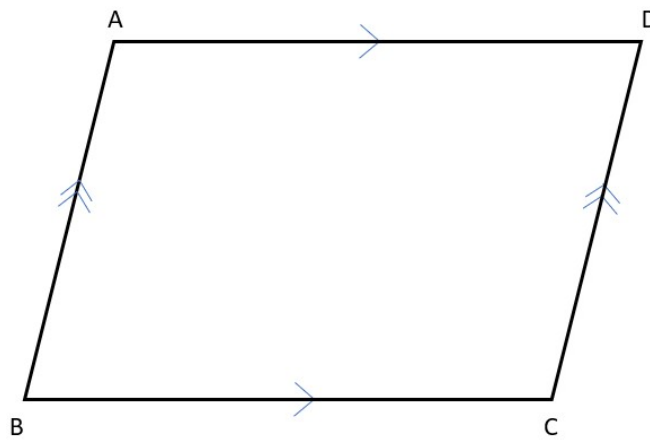


## 平行四辺形になるための条件

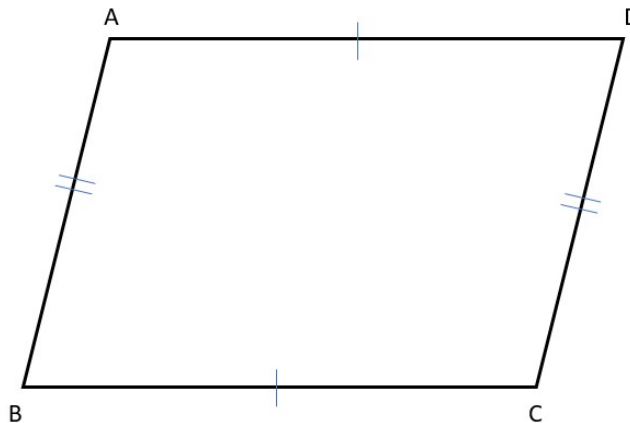
四角形が平行四辺形になるための条件は、平行四辺形の「定義」や「定理」、そして平行四辺形の性質の逆が正しいと証明できたものをまとめて、次のとおりになるよ。

平行四辺形になるための条件

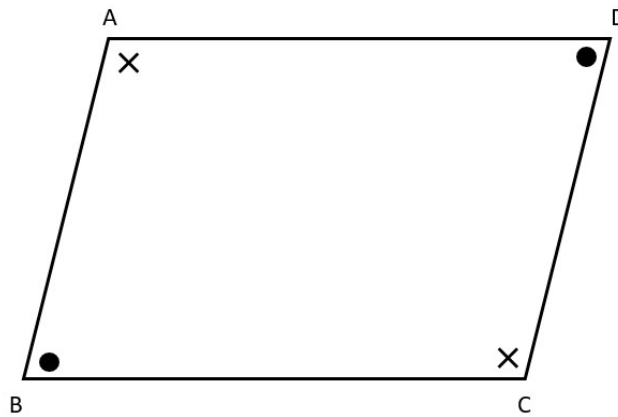
- ・ 2組の対辺がそれぞれ平行である。



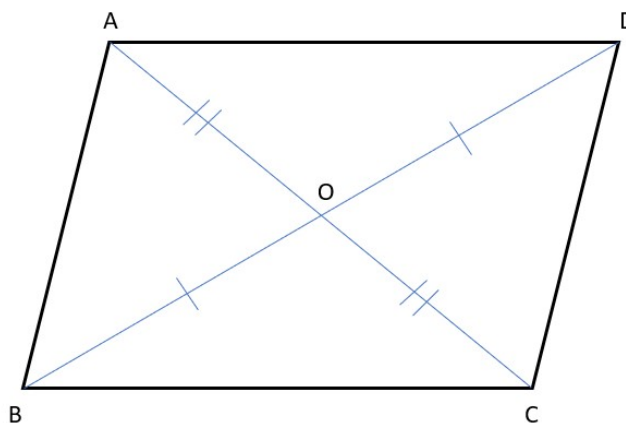
- ・ 2組の対辺がそれぞれ等しい。



- ・ 2組の対角がそれぞれ等しい。



- ・ 対角線がそれぞれの中点で交わる。



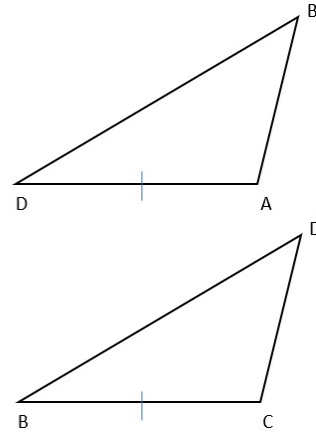
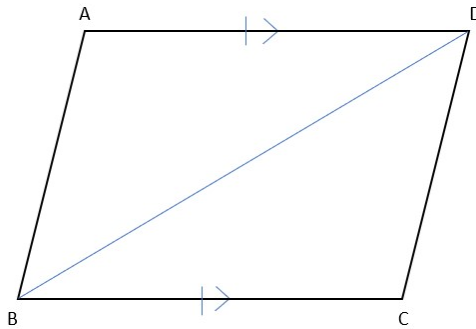
また、定理では出てこなかったもので、もう1つ平行四辺形になる条件があるから紹介するね。

それは、「1組の対辺が平行でその長さが等しい」という条件なんだ。  
実際に証明して確認していこう。





下の図のように四角形ABCDの頂点BとDを結んで、 $\angle ABD$ と $\angle CDB$ が等しくなることを証明していこう。



$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ において

仮定から

$AD = CB \dots \textcircled{1}$

BDは共通  $\dots \textcircled{2}$

AD//CBより、平行線の錯角は等しいから

$\angle ADB = \angle CBD \dots \textcircled{3}$

①、②、③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$

合同な図形の対応する角は等しいから

$\angle ABD = \angle CDB$

錯角が等しいので、

$AB \parallel DC$

AD//CB、AB//DCより

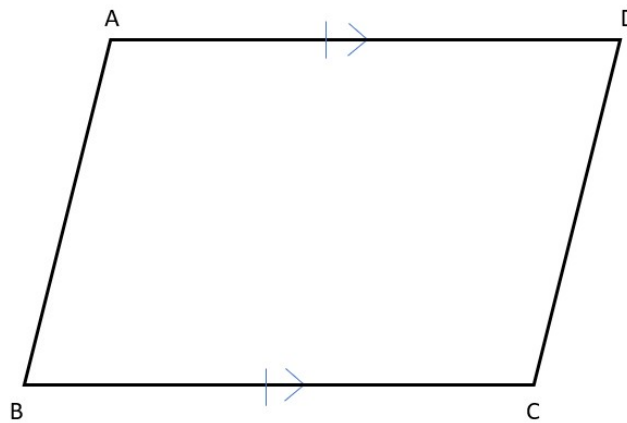
2組の対辺がそれぞれ平行だから、四角形ABCDは平行四辺形である。

このように証明できるから、「1組の対辺が平行でその長さは等しい」は、「平行四辺形になるための条件」といえるよ。



平行四辺形になるための条件

- ・ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。



平行四辺形になるための5つの条件は、テストにもよく出題されるから確実に覚えておこう。

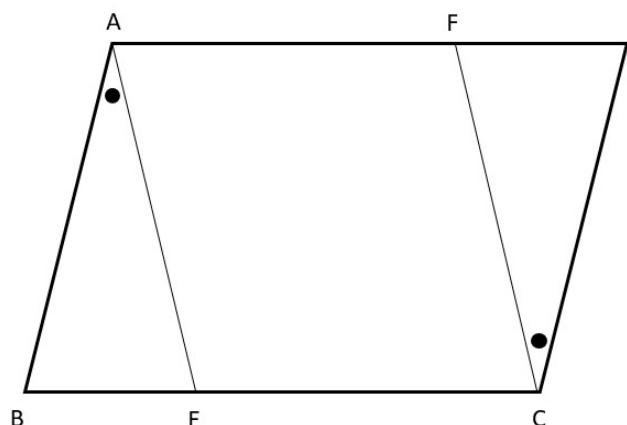
## 平行四辺形になるための条件を使った証明問題

平行四辺形になるための条件を使った証明問題にチャレンジしよう。

問題

平行四辺形ABCDの辺BC、AD上に2点E、Fをとります。

この時、 $\angle BAE = \angle DCF$ ならば、四角形AECFが平行四辺形となることを証明しなさい。



①仮定と結論を問題文から見つけよう。

仮定

$$\angle BAE = \angle DCF$$

四角形ABCDが平行四辺形である

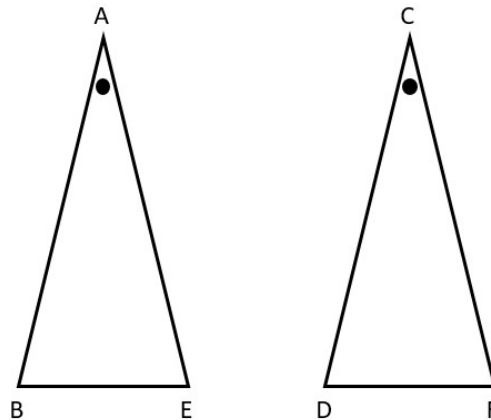
結論

四角形AECFが平行四辺形

結論は簡単に見つけることができるけれど、平行四辺形になるためのどの条件を使うか迷ってしまうね。

今回は、「2組の対辺がそれぞれ等しい」を使って証明していこう。

そのために、 $\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ の合同を証明していくよ。



②仮定からわかることを書こう。

四角形ABCDが平行四辺形だから、

$AB = CD$  (平行四辺形の対辺が等しいから)

$\angle ABE = \angle CDF$  (平行四辺形の対角が等しいから)

を使うことができるよ。



証明

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

仮定から、

$$\angle BAE = \angle DCF \dots \textcircled{1}$$

平行四辺形の対辺は等しいので、

$$AB = CD \dots \textcircled{2}$$

また、平行四辺形の対角は等しいので、

$$\angle ABE = \angle CDF \dots \textcircled{3}$$

①、②、③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$$

合同な図形の対応する辺は等しいので

$$AE = CF \dots \textcircled{4}$$

$$BE = DF \dots \textcircled{5}$$

平行四辺形の対辺は等しいので、

$$AD = BC \dots \textcircled{6}$$

⑤、⑥より

$$AD - DF = BC - BE$$

よって、

$$AF = EC \dots \textcircled{7}$$

④、⑦から2組の対辺がそれぞれ等しいので、

四角形AECFは平行四辺形となる。

今回の問題のように、ひき算を使って辺や角が等しいことを証明することがあるから覚えておこう。

## 「平行四辺形になるための条件」まとめ

- ・ 平行四辺形になるための条件は全部で5つある。
  - ① 2組の対辺がそれぞれ平行である。
  - ② 2組の対辺がそれぞれ等しい。
  - ③ 2組の対角がそれぞれ等しい。
  - ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。
  - ⑤ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。

