

平方根の計算「平方根の掛け算と割り算」を解説 (有理化とは)

平方根の乗法のやり方

平方根の乗法（かけ算）のやり方は、普通のかけ算に「ルート」がついただけだと思えばOKだよ。

平方根の乗法は、ルートの中の数字を掛け合わせるだけなんだ。

たとえば、

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5}$$

だったら、ルートの中の数字（2と5）を掛け合わせるだけなので、

$$\sqrt{2 \times 5}$$

$$= \sqrt{10}$$

となるよ。

もう一問やってみよう。

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

だったら

$$\sqrt{2 \times 3}$$

$$= \sqrt{6}$$

となるね。

平方根の乗法のポイント

平方根の乗法は、ルートの中の数字を掛け合わせればよい

$$a、bが正の数\ のとき \ \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{ab}$$



なぜルートの中の数字を掛け合わせるだけでいいのか？

ただ「ルートの中の数字を掛け合わせるだけでよい」とはとっても、どうしてそうなるのか、理由を確かめてみよう。

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ を例として考えてみるよ。

① $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ の計算を考えよう。

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \times \sqrt{3} \text{を} 2 \text{乗してみよう} \\ & = (\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 \\ & = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} \text{と} \sqrt{3}) \text{の順番を入れ替えるよ。} \\ & = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ & = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \\ & = 2 \times 3 \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = 2 \times 3 \\ & \text{になるね。} \end{aligned}$$

②左辺と右辺の平方根を考えよう。

今求めた $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = 2 \times 3$ の、左辺と右辺の平方根を考えてみるよ。

平方根とは、「2乗する前の数」だったよね。

左辺 $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2$ の平方根は $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$
右辺の 2×3 の平方根は $\sqrt{2 \times 3}$ だから、

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6} \text{という式が成り立つね。}$$

これで、平方根の乗法は、ルートの中の数字を掛け合わせたものと等しい、ということを確認することができたね。



平方根の除法のやり方

平方根の除法（割り算）もさっきのかけ算と同じように、ルートの中の数字を割り算するだけだよ。

例えば

$$\sqrt{10} \div \sqrt{2}$$

だったら、

$$\sqrt{10 \div 2}$$

$$= \sqrt{5}$$

ルートの中で $10 \div 2$ をしているだけだね。

もう一問やってみよう。

$$\sqrt{14} \div \sqrt{7}$$

だったら、

$$\sqrt{14 \div 7}$$

$$= \sqrt{2}$$

最後にもう一問やってみよう。

$$\sqrt{5} \div \sqrt{2}$$

$5 \div 2$ は割り切れないよね。そういうときは分数であらわそう。

割り算の場合、 \div の後の数を分母にすればよいから

$$\sqrt{5 \div 2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

となるよ。

分母にも分子にもルートがあるときは、まとめて次のように表すことができるよ。

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}}$$

まさに普通の割り算と同じようにできるね。



ちなみに、このように割り算で分母がルートになったとき、テストなどでは「有理化」して分母がルートにならないようにするのが安全だよ。

問題で特別指示がないのであれば、明確に「ダメ」というわけではないのだけれど、暗黙の了解（答えの分数は、約分していないとバツになる、などと同じ）で分母がルートの場合、有理化することになっていて、そのままだと不正解や減点の対象になってしまう場合もあるんだ。

有理化については、このあとやり方を解説するので安心してね。

平方根の除法のポイント

平方根の除法（割り算）は、ルートの中の数字を割り算すればよい

a 、 b が正の数のとき

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$

※分母がルートになったときは、有理化すると安心。

平方根の変形のやり方

平方根は、変形することができるんだ。

今までも $\sqrt{4} = 2$ と変形させたり、 $3 = \sqrt{9}$ に変形させたりしてきたよね。

今回学習する「平方根の変形」は、次の2つのパターンだよ。

平方根の変形の2パターン

・ $a\sqrt{b}$ を \sqrt{c} にする

・ \sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ にする

それでは順番に紹介していくね。



$a\sqrt{b}$ を \sqrt{c} にする

例えば、 $2\sqrt{3}$ を \sqrt{c} の形に変形してみるよ。

$2\sqrt{3}$ とは、 $2 \times \sqrt{3}$ のことだよ。

$2 = \sqrt{4}$ だから、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= 2 \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} && \leftarrow \text{ルートのかけ算をしよう。} \\ &= \sqrt{4 \times 3} \\ &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ になることがわかったね。

今度は、 $3\sqrt{2}$ を \sqrt{c} の形に変形してみよう。

$3\sqrt{2}$ とは、 $3 \times \sqrt{2}$ のことだね。

$3 = \sqrt{9}$ だから、

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &= 3 \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} && \leftarrow \text{ルートのかけ算をしよう。} \\ &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ になることがわかったね。

$a\sqrt{b}$ を \sqrt{c} に変形するポイント

a を2乗してあげれば、ルートの中に入れることができるので、ルートの中の数字とかけ算してあげればよい。

(例)

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = \sqrt{32}$$

4を2乗してルートの中に入れていよう。

$$\sqrt{53} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} = \sqrt{75}$$

5を2乗してルートの中に入れていよう。



\sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ に変形する

こんどは逆の変形をさせるよ。

$\sqrt{25}=5$ のような変形はやってきたよね。

どういうときにルートの中から数字が出ていくかというと、ルートの中で同じ数字が2つかけ合わされているときだよ。

$\sqrt{25}$ だったら
 $\sqrt{5 \times 5}$ になるよね。

$\sqrt{5 \times 5}$
 $=\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ だからルートの外に5が出ていくよ。

同じように考えてみよう。

$\sqrt{12}$ を $a\sqrt{b}$ に変形してみよう。

さっきの例のように、25は5の2乗だということはすぐに思いつくかもしれないけれど、12となると、パツとは思いつかないかもしれないね。

そんなときは、素因数分解をすればいいんだ。

12を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 3$ となるよね。
つまり、「2」が2回かけ合わされていることがわかるね。
だから、「2」をルートの外に出すことができるんだ。

ということは

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad \leftarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \\ &= 2 \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

と表すことができるね。



$\sqrt{18}$ を $a\sqrt{b}$ に変形してみよう。

18を素因数分解すると $2 \times 3 \times 3$ になるね。

つまり、「3」が2回かけ合わされているから、「3」をルートの外に出すことができるね。

ということは

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad \leftarrow \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 = \sqrt{2} \times 3 \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

と表すことができるね。

$\sqrt{24}$ を $a\sqrt{b}$ に変形してみよう。

24を素因数分解すると $2 \times 2 \times 2 \times 3$ だよ。

ということは

$$\begin{aligned}\sqrt{24} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \times \sqrt{2} &= 2 \text{ だから} \\ &= 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

と表すことができるね。

$2 \times 2 \times 2 \times 3$ は 2×2 が1セットあるから、ルートの外に出て、残った 2×3 はルートの中のままになるよ。

\sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ に変形するポイント

ルートの中で同じ数字が2回かけ合わされているとき、ルートの外に出すことができる。同じ数字が2回かけ合わされているかどうかを見つけるには、素因数分解すればよい。

(例)

$$\sqrt{4 \times 4 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 5} = 3\sqrt{15}$$



\sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ の形にする変形はテストでもすごくよく使うんだ。
だから、速く変形するコツを紹介するね。

\sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ に速く変形する方法

ルートの中の数字を、次のどれかに変形できるかどうか注目してみよう。

$$4 \times \bigcirc$$

$$9 \times \bigcirc$$

$$16 \times \bigcirc$$

$$25 \times \bigcirc$$

$$36 \times \bigcirc$$

例えば、 $\sqrt{32}$ を考えよう。

$\sqrt{32}$ のルートの中にある「32」は「16×2」で表せるよね。

$$\begin{aligned} \sqrt{32} \\ = \sqrt{16 \times 2} \end{aligned}$$

「16」は「4×4」なので、ルートが外れて

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{と変形できるよ。}$$

平方根を変形して近似値を求めよう

平方根の近似値は以前学習したよね。

$$\cdot\sqrt{2} = 1.4142156$$

覚え方：一夜一夜に人見頃

ひと(1)よ(4) ひと(1)よ(4)に(2) ひと(1)み(3)ご(5)ろ(6)

$$\cdot\sqrt{3} = 1.7320508$$

覚え方：人並みに奢れや

ひと(1)な(7)み(3)に(2) お(0)ご(5)れ(0)や(8)

$$\cdot\sqrt{5} = 2.2360679$$

覚え方：富士山麓オウム鳴く

ふ(2)じ(2)さん(3)ろく(6) お(0)一む(6)な(7)く(9)



このように、ルートの中の数字が「2」「3」「5」の場合の近似値を求めることはできるよね。

ルートの中の数が大きくても、平方根を変形して「2」「3」「5」を作り出すことができれば、近似値を求めることができるんだよ。

$\sqrt{12}$ の近似値を考えてみよう。

$\sqrt{12}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると、

$$\begin{aligned}\sqrt{12} \\ &= \sqrt{2 \times 2 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

になるよね。

$2\sqrt{3}$ とは、 $2 \times \sqrt{3}$ のことだから、 $\sqrt{3}$ の近似値を代入することができるよ。

そうすると

$$\begin{aligned}2 \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 1.7320508 \\ &= 3.4641016\end{aligned}$$

$\sqrt{12}$ の近似値を求めることができたね。

$\sqrt{27}$ の近似値を考えてみよう。

$\sqrt{27}$ を $a\sqrt{b}$ の形にすると、

$$\begin{aligned}\sqrt{27} \\ &= \sqrt{3 \times 3 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

になるよね。

$3\sqrt{3}$ とは $3 \times \sqrt{3}$ のことだから、 $\sqrt{3}$ の近似値を代入することができるよ。

そうすると

$$\begin{aligned}3 \times \sqrt{3} \\ &= 3 \times 1.7320508 \\ &= 5.1961524\end{aligned}$$

$\sqrt{27}$ の近似値を求めることができたね。



有理化とは

有理化とは、分母にルートを含む数を、分母にルートを含まない形にすることだよ。

平方根の暗黙のルールとして、テストで答えるときに分母にルートがついていると減点されたり、不正解になる場合もあるんだ。

だから、有理化して分母のルートをなくす作業が必要なんだよ。

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ を有理化してみよう。

このままだと、分母にルートがあるよね。

分母のルートを消すためには、分母と同じ数のルートを、分母と分子にかけたらいいよ。

今回だったら分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけてみよう。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \quad \leftarrow \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

分母のルートがなくなったことがわかるね。これが有理化だよ。

ほとんどの場合、分母のルートと同じ数をかければOKだよ。

よくある有理化の間違い

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ で $\sqrt{2}$ を分子にかけ忘れる。

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



「平方根の乗法と除法」まとめ

- ・平方根の乗法のポイント

平方根の乗法は、ルートの中の数字をかけ合わせればよい

$$a、bが正の数\ のとき、\ \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{ab}$$

- ・平方根の除法のポイント

平方根の除法（割り算）は、ルートの中の数字を割り算すればよい

$a、b$ が正の数\ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

- ・平方根の変形の2パターン

$a\sqrt{b}$ を \sqrt{c} にする

\sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ にする

- ・ $a\sqrt{b}$ を \sqrt{c} に変形するポイント

a を2乗してあげれば、ルートの中に入れることができるので、ルートの中の数字とかけ算してあげればよい。

(例)

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = \sqrt{32}$$

4を2乗してルートの中に入れていよ。

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} = \sqrt{75}$$

5を2乗してルートの中に入れていよ。



- ・ \sqrt{c} を $a\sqrt{b}$ に速く変形する方法

ルートの中の数字を、次のどれかに変形できるかどうか注目してみよう。

$$4 \times \bigcirc$$

$$9 \times \bigcirc$$

$$16 \times \bigcirc$$

$$25 \times \bigcirc$$

$$36 \times \bigcirc$$

- ・ルートの中の数が大きい場合に近似値を求める方法

ルートを変形させて、「2」「3」「5」を作り出し、それぞれの近似値を代入して求める。

- ・分母にルートがある場合に、有理化する方法

分母のルートと同じ数を、分母と分子それぞれにかける。

