「多面体・正多面体」とは？
種類と特徴一覧表（展開図つき）まとめ

多面体とは

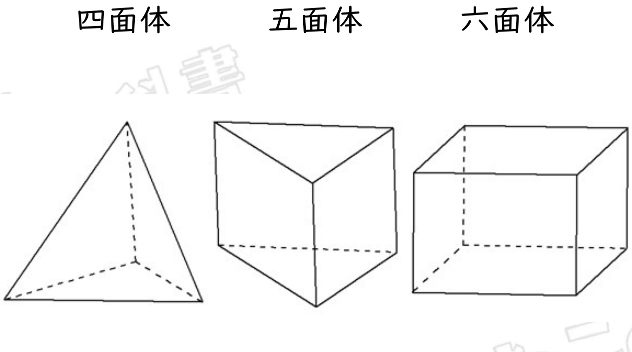
多面体とは、「平面だけで囲まれた立体」のことだよ。

例えば、サイコロなんかを想像したらわかりやすいと思うよ。
サイコロって６つの面が平らな面（平面）でできているよね。

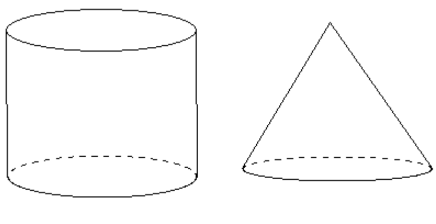
逆に平面じゃないのは、缶ジュースやペットボトルなんかだね。
どちらとも周りは「曲がった面（曲面）」でできているよね。

> 多面体とは
>
> 平面で囲まれた立体のこと（例：サイコロ）

その多面体を作っている「面の数」によって名前が変わるよ。



多面体ではないものの例は下図のようなものだよ。
両方とも曲がった面（曲面）で囲まれているよね。



正多面体の種類

多面体とはどういうものかわかったかな？

多面体には、実はさらに「正多面体」というものがあるんだ。

小学校でも「正三角形」「正方形」「正五角形」「正〇〇〇」なんかを学習したよね。

「三角形」の仲間の中に、さらに「正三角形」があったり、「四角形」の仲間の中に、さらに「正方形」があったりしたのと同じ。

「正三角形」「正方形」「正五角形」「正〇〇〇」というのは、すべての辺が同じ長さだとそう呼ばれるんだったよね。

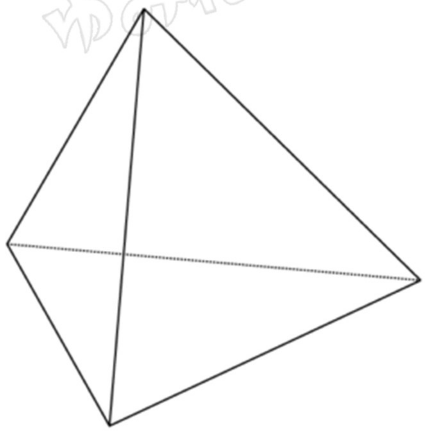
中１で学習する「正多面体」は、「すべての面が同じになる立体」のことなんだ。

それでは実際に正多面体の図を見てみよう。

正多面体の図

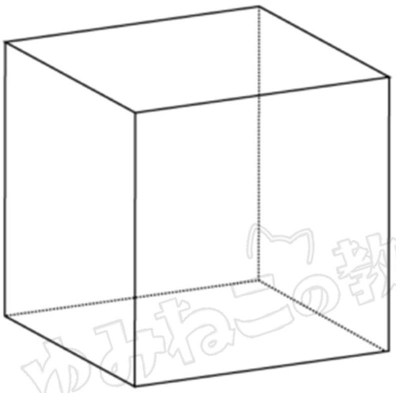
正多面体を紹介するね。すべての面が同じになっていることがわかるかな？

正四面体



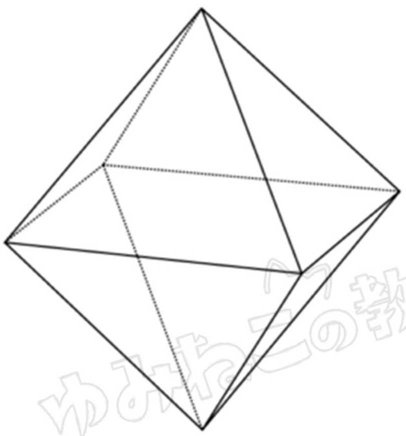
正四面体は、「同じ形の正三角形」の、「四つの面」でできている立体だよ。

正六面体



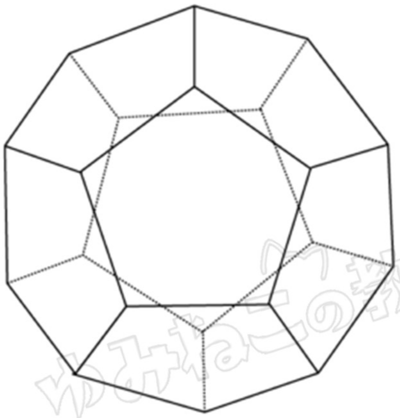
正六面体は、「同じ形の正方形」の、「六つの面」でできている立体だよ。

正八面体



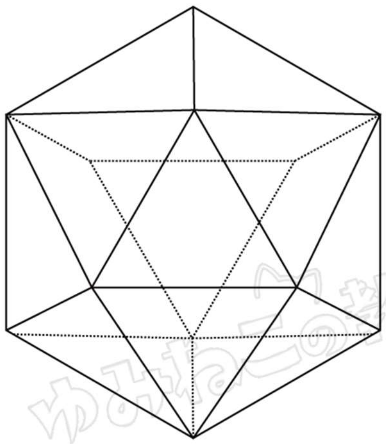
正八面体は、「同じ形の正三角形」の、「八つの面」でできている立体だよ。

正十二面体



正十二面体は、「同じ形の正五角形」の、「十二の面」でできている立体だよ。

正二十面体



正二十面体は、「同じ形の三角形」の、「二十の面」でできている立体だよ。

正多面体の一覧表

正多面体は５種類しか存在しないんだ。
正多面体の面の形や面の数などを下の表にまとめたよ。
なぜ「５種類しか存在しないのか」は、あとで詳しく説明するので安心してね。

正多面体の名	面の形	頂点の数	辺の数	面の数
正四面体 （せいしめんたい）	正三角形	4	6	4
正六面体 （せいろくめんたい）	正方形	8	12	6
正八面体 （せいはちめんたい）	正三角形	6	12	8
正十二面体 （せいじゅうにめんたい）	正五角形	20	30	12
正二十面体 （せいにじゅうめんたい）	正三角形	12	30	20

５種類とも、面の形が「正〇〇形」になっているね。

正多面体の定義（特徴）

正多面体とは、「すべての面が同じ」と説明したけれど、実はこの表現では少し”あいまい”なんだ。

正多面体にはきちんとした定義と呼ばれる特徴が２つあるんだよ。
この２つの特徴を満たしてこそ正多面体ということになるんだ。

> 正多面体の定義
>
> ①どの面もすべて合同な正多角形である。
> ②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

正直、これを聞いただけではピンとこないよね。
だけれど、①はなんとなく理解できるんじゃないかな？

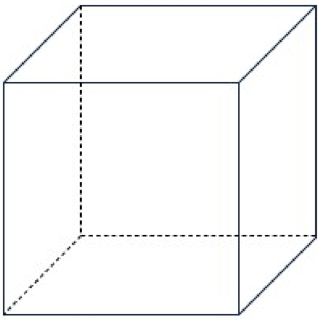
「①どの面もすべて合同な正多角形である」

というのは、すべての面が合同な正多角形ということだよね。
一覧表にもあったけれど、すべての正多面体は「正三角形」・「正方形」・「正五角形」のどれかで囲まれていたよね。

「②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている」については立方体を例に考えてみよう。

立方体は正多面体なのか？

実際に立方体が正多面体かどうかを調べてみよう。



正多面体の定義に合っているかチェック！

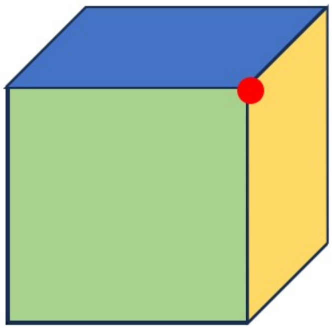
☑どの面もすべて合同な正多角形である。
→すべての面が「正方形」になっている。（OK！）

☑どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。
→どの頂点にも３つの面が集まっている。（OK！）

２つの条件をクリアしているから、立方体は「正多面体」だよ。

どの頂点にも３つの面が集まっているってどういうこと？

たとえば、下の赤い点に注目してみよう。
ここが「頂点」だよ。（頂点はたくさんあるんだけれど、例として一つだけを赤い点にしているよ）



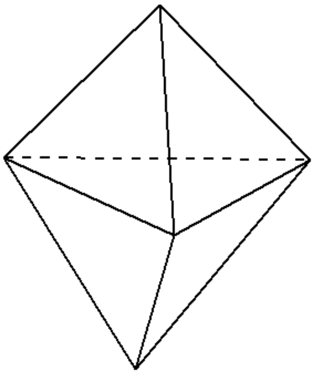
この頂点を含んでいる平面は色の付けたところ３つになるよね。
「頂点を含んでいる面」や「頂点に接している面」を「頂点に面が集まっている」と表現しているんだね。図で確認するとわかりやすいね。

この「頂点に３つの面が集まっている」かどうかは、他の頂点で試してもやっぱり同じ状態になっているよ。
だから、「どの頂点にも３つの面が集まっている」と言えるんだね。

このように、正多面体の２つの条件を満たしているから、立方体は正多面体といえるんだね。

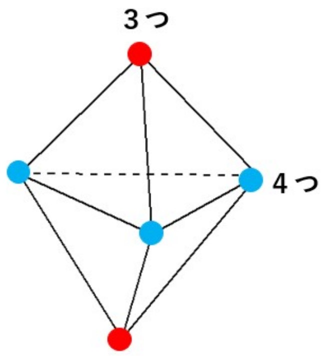
正多面体のように見えるけれど、正多面体ではない「六面体」

下図のような「六面体」という立体は、すべて合同な正三角形で囲われているよ。
そうすると、ぱっと見た感じでは「正多面体なのかな」と思ってしまうね。



でも、１つの頂点に集まっている面の数を確認してみよう。

頂点によって、集まっている面の数は「３つ」とか「４つ」になってしまって、バラバラなんだ。



だから、正多面体の定義の①はクリアしているんだけれど、②がクリアできていないから、「六面体」は正多面体ではないんだよ。

正多面体かどうかを判断する時は、正多面体の定義２つともをクリアしているかをちゃんと確認しよう。

正多面体の定義（おさらい）

①どの面もすべて合同な正多角形である。
②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

オイラーの多面体定理とは
多面体には実はすごい性質があるんだ。

１８世紀の数学者オイラーが発見した性質で、それを「オイラーの多面体定理」というよ。

さっきの表を見てみよう。

正多面体の名	面の形	頂点の数	辺の数	面の数
正四面体 (せいしめんたい)	正三角形	4	6	4
正六面体 (せいろくめんたい)	正方形	8	12	6
正八面体 (せいはちめんたい)	正三角形	6	12	8
正十二面体 (せいじゅうにめんたい)	正五角形	20	30	12
正二十面体 (せいにじゅうめんたい)	正三角形	12	30	20

オイラーが発見したのは、多面体において、以下の計算式が成り立つということ。

オイラーの多面体定理

（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝２

本当にこんな計算式が成り立っているのかな？
例えば、正四面体で計算して確かめてみよう。

（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）
＝４－６＋４
＝２

確かに「２」になっているね。

正六面体でも計算してみよう。

（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）
＝８－１２＋６
＝２

これも「２」になっているね。

多面体ってふしぎな性質を持っているんだね。
この「オイラーの多面体定理」を覚えておくと、「頂点の数」「辺の数」「面の数」のどれか２つが分かれば、残りの1つも計算すれば分かるということだね。

これを知らないと、問題に出てきたときに、実際に頭の中か紙にその多面体の立体図を描かないとわからない、なんてことになってしまうね。
四面体くらいだったらなんとかなるかもしれないけれど、二十面体なんて言われてしまったら、大変だよね。

ぜひ覚えておこうね。

正多面体の覚え方（語呂合わせ）

多面体はいっぱい種類があるけれど、「正」多面体となると５種類しか存在しないんだよ。

テストで「正多面体５種類答えなさい」という問題が出たときに、ぱっと答えられるように、語呂合わせを紹介するね。

正多面体の覚え方①

「よーろっぱじゅうに２０ある」

正四面体（よー）
正六面体（ろっ）
正八面体（ぱ）
正十二面体（じゅうに）
正二十面体（２０）

※最近だと、「２０」のところをアイドルグループの「NiziU」で覚えても面白いね。

正多面体の覚え方②

「二十歳になったらじゆう（じゅうに）にしろや」

正二十面体（二十）
正十二面体（じゅうに）
正四面体（し）
正六面体（ろ）
正八面体（や）

正多面体はなぜ５種類なのか？

今まで多面体や正多面体を学習してきて、こんな疑問をもった人はいないかな？

「正多面体はなぜ５種類しかないのか？」

すごくいい疑問だと思うから説明していくね。

STEP1　正多面体とは何か

正多面体の定義は次の通りだったよね。

正多面体とは

①どの面もすべて合同な正多角形である。
②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

STEP2 正多面体の定義に１言追加

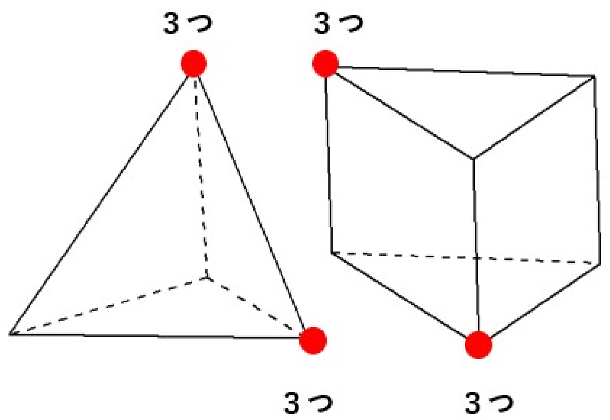
追加したいのは、

②どの頂点にも面が３つ以上の同じ数だけ集まっている。

ということ。

難しいことを言っているかもしれないけれど、当たり前のことなんだよ。

なぜなら、どんな立体でも１つの頂点に面が３つ以上でないと立体の角を作ることはできないよね。



自分で立体を描いてみたらわかると思うよ。
１つの頂点に面が２枚の立体なんて描けない思うよ。

だから正多面体の定義は次のようになるよ。

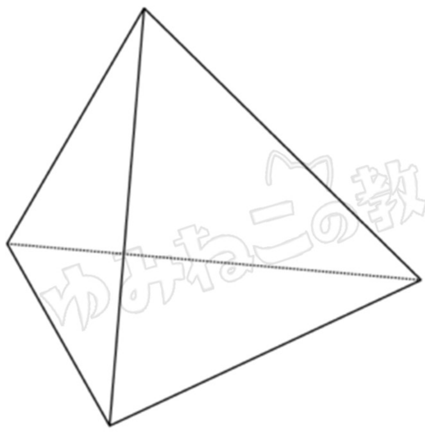
正多面体とは

①どの面もすべて合同な正多角形である。
②どの頂点にも面が３つ以上の同じ数だけ集まっている。

ここまでは大丈夫かな？
それでは、この正多面体の定義を使って、なぜ５種類しかないかを説明するね。

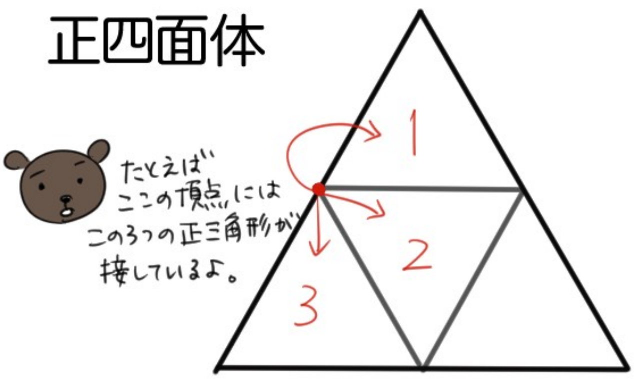
STEP３ 正四面体・正八面体・正二十面体の展開図を考えよう

まず正四面体で考えよう。

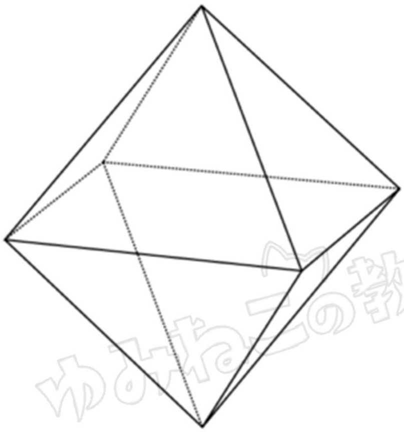


上の頂点の周りの展開図は次の通りになるよね。

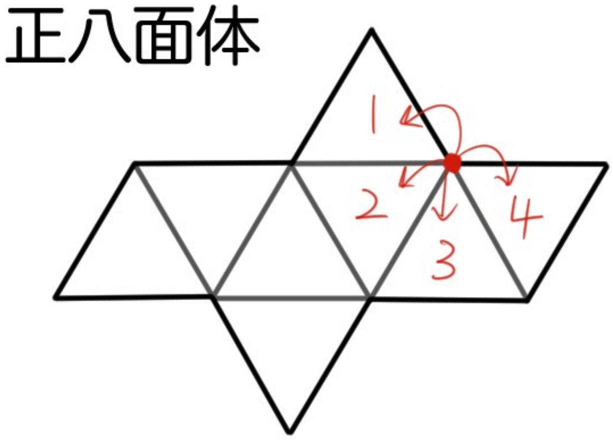
１つの頂点の周りに正三角形の面が３枚接していることがわかるね。



次に正八面体で考えよう。

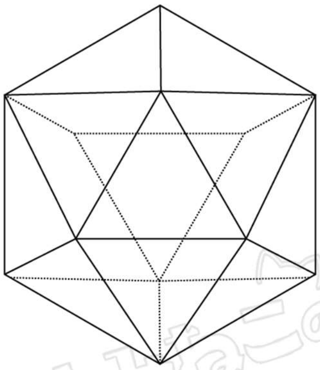


１つの頂点の周りの展開図は次のようになるね。

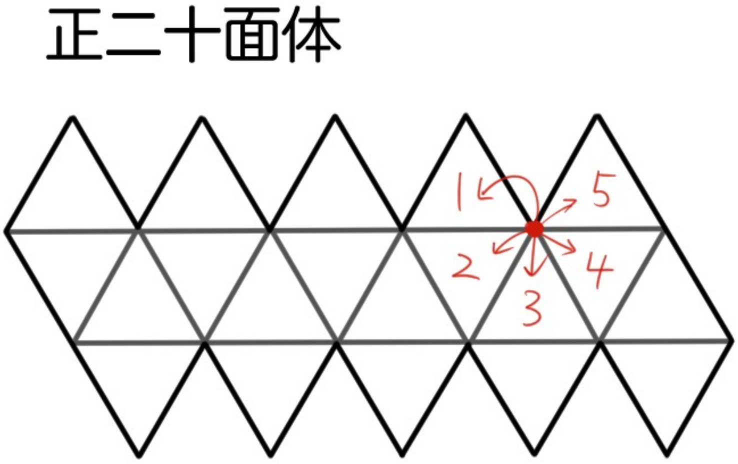


１つの頂点の周りに正三角形が４枚あることがわかるね。

次に正二十面体を考えよう。



１つの頂点の周りの展開図は次のようになるね。

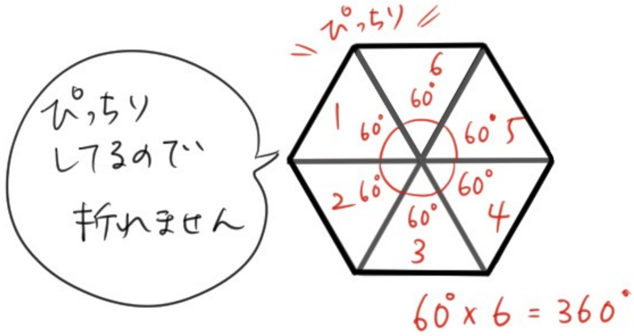


１つの頂点の周りに正三角形が５枚あることがわかるね。

１つの頂点の周りに集まる正三角形の数が「３」枚、「４」枚、「５」枚とくれば、こんなふうに予想する人もいるんじゃないかな？

予想
次は１つの頂点の周りに６枚の正三角形ができる正多面体になるのかな？

回答
１つの頂点の周りに６枚の正三角形ができる立体は作れないよ。
実際に１つの頂点の周りに６枚の正三角形があったとすると、次のようになるよ。



正三角形の１つの角度が６０°だから６枚あると、６０×６＝３６０°でぴったり１周分になるね。
ただ、これでは「立体は作れない」よ。
だって「すき間」がないと折れないから立体はできないんだ。

試しに、一枚の紙を折って、その部分を頂点にして立体を作ろうとしてみて。
一部を重ねたり、切り取ったりして「すき間」を作らないと立体にはならないはずだよ。

だから、１つの頂点の周りに６枚の正三角形がある立体は作ることができないんだ。

ほかには、「３枚」「４枚」「５枚」があるなら、「２枚」もあるのでは？という疑問も出てくるかもしれないね。

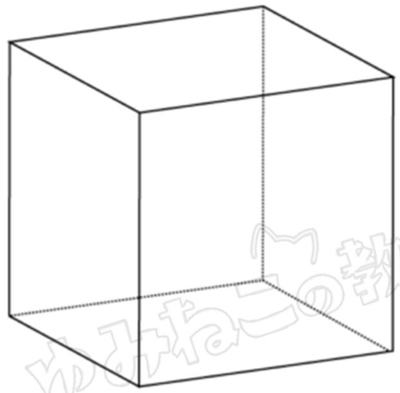
疑問
１つの頂点の周りに２枚の正三角形ができる正多面体はないの？

回答
これはさっきも説明したね。２枚の面だけでは、そもそも「立体」はできないよね。

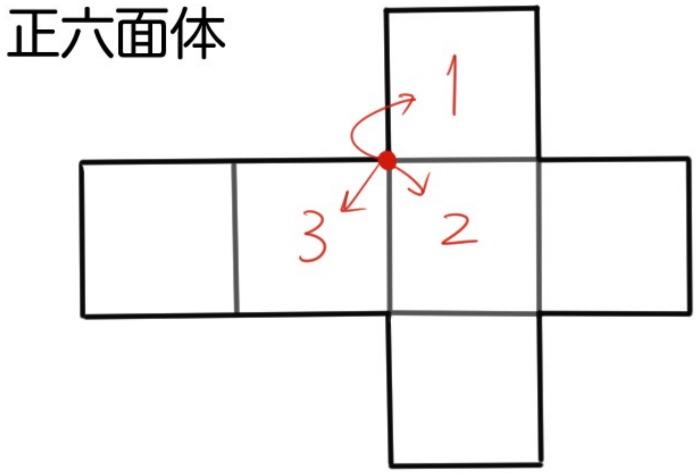
これらのことから、１つの頂点の周りに正三角形ができる正多面体は、１つの頂点に３つの正三角形が集まる「正四面体」・１つの頂点に４つの正三角形が集まる「正八面体」・１つの頂点に５つの正三角形が集まる「正二十面体」しか存在しないんだよ。

同じように他の正多面体も考えていくよ。

STEP４ 正六面体の展開図を考えよう



１つの頂点の周りの展開図は次のようになるね。



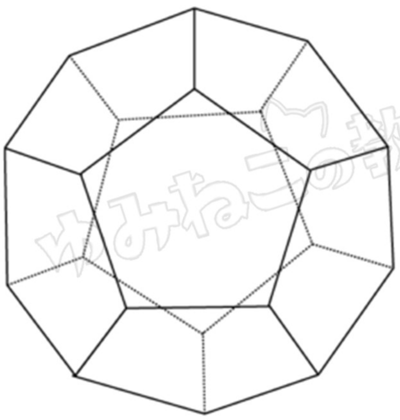
１つの頂点の周りに正方形が３枚あることがわかるね。正方形って１つの角度が９０゜だから、３枚だったら９０×３＝２７０゜になるね。

ただ、４枚になると９０×４＝３６０゜で、ぴったり１周分になってしまうね。
これでは、さっき説明したとおり立体は作れないよ。
だってすき間がないと折れないから立体はできないからね。

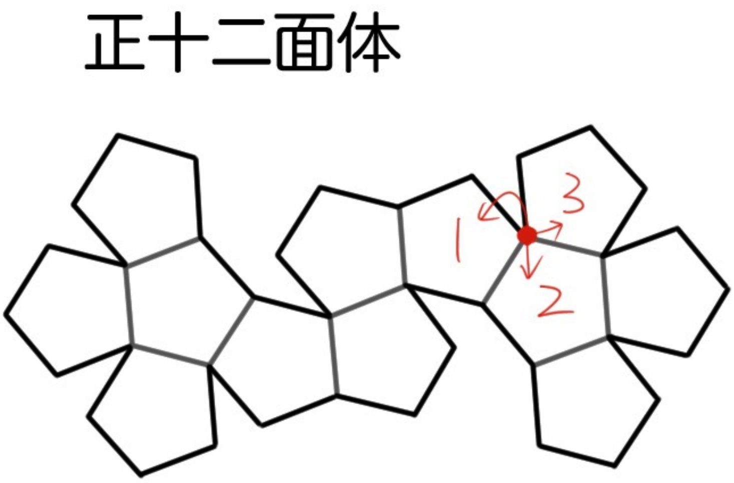
つまり、１つの頂点の周りに４枚の正方形ができるなんてことはありえない。
もちろん、２枚の正方形でも立体にはならない。
つまり、「３枚の正方形が集まった」立体しか存在しないんだ。

これらのことから、１つの頂点の周りに正方形ができる正多面体は、１つの頂点に３つの正方形が集まる「正六面体」しか存在しないんだよ。

STEP５ 正十二面体を考えよう



１つの頂点の周りの展開図は次のようになるね。



１つの頂点の周りに正五角形が３枚あることがわかるね。正五角形は１つの内角の角度が１０８°だから、３枚だったら１０８×３＝３２４°。
３６０°よりも小さいから、すき間がちゃんとできるね。

ただ、４枚になってしまうと１０８×４＝４３２°になっちゃうよね。３６０°を超えるから、立体にはならなくなってしまうね。
それどころか、描ききることさえできないね。

つまり、１つの頂点の周りに４枚の正五角形ができるなんてことはありえないよ。
もちろん、２枚の正五角形でも立体にはならないね。

これらのことから、１つの頂点の周りに正五角形ができる正多面体は、１つの頂点に３つの正五角形が集まる「正十二面体」しか存在しないんだよ。

STEP６ STEP３～５をまとめる

今までのことから次のことがわかったよ。

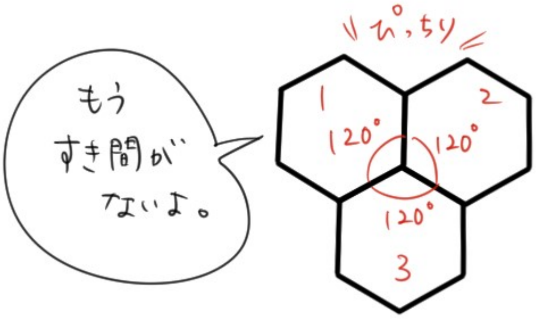
１つの頂点の周りに正三角形ができる正多面体は、正四面体・正八面体・正二十面体しか存在しない。

１つの頂点の周りに正方形ができる正多面体は、正六面体しか存在しない。
１つの頂点の周りに正五角形ができる正多面体は、正十二面体しか存在しない。
だから正多面体は５種類しか存在しなんだね。

おまけ：正六角形で囲まれた正多角形は存在しない

実は正六角形で囲まれた正多角形は存在しなんだよ。なんでかというと、正六角形の１つの内角の角度は１２０°。

もし１つの頂点の周りに正六角形が３つあったら、それだけで１２０×３＝３６０°になってしまうんだ。３６０°は１周分だから、これでは、立体は作れないね。



同じように、正七角形・正八角形で囲まれた正多角形というのも存在しないんだよ。３つ以上集まった時点で３６０°を余裕で超してしまうからね。

つまり、１つの頂点に正多角形が集まった時、３６０°を超してしまうかどうかがカギということだね。

多面体・正多面体の世界って、なかなか奥が深くて面白いね。