

# 「円周角の定理の逆」とは？

## 証明と問題の解き方をわかりやすく解説

### 円周角の定理の逆が成り立つか調べよう

「円周角の定理の逆」が成り立つのかどうか？とは、「円周角の定理」の「1つの弧に対する円周角の大きさは一定」という定理が、逆についても成り立つのかどうかということだよ。

円周角の定理の逆について勉強する前に、まずは一度「円周角の定理」とはどういうことだったかを復習しよう。

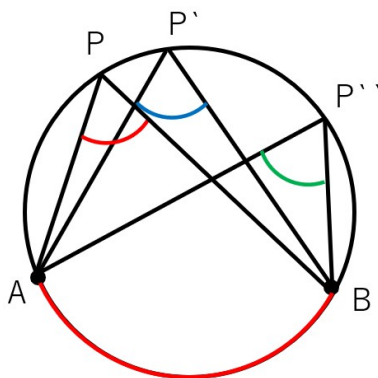
### 円周角の定理の復習

#### 円周角の定理

「円周角の定理」とは次の2つのことだよ。

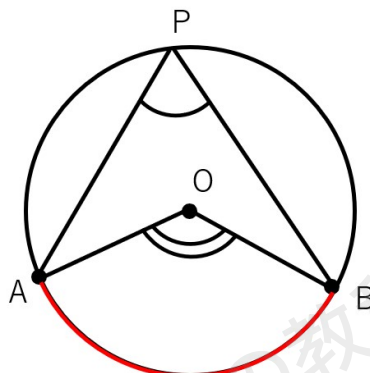
- ・ 1つの弧に対する円周角の大きさは一定である。

$$\angle APB = \angle AP'B = \angle AP''B$$



- ・ 1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分である。

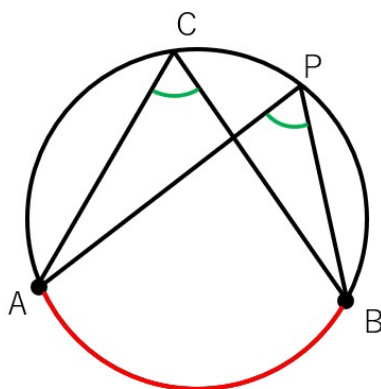
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$



今回学習する「円周角の定理の逆」は、今復習した2つの「円周角の定理」のうち、「1つの弧に対する円周角の大きさは一定である。」という性質に注目していくよ。

∠Pと∠Cの大きさを比べよう

下の図のように、点Pが円周の上にあると、 $\angle APB = \angle ACB$  (∠C)になるよね。まさにこれが「円周角の定理」の性質だよ。



つまり、「弧ABがあり、その円周角である∠Cと∠APBは同じ角度になる」ということだね。ここで注目して欲しいのは、

- ・ 「弧AB」ということは、「AとBはひとつの円の円周上」にある。
- ・ 「円周角∠C」ということは、「cは、弧ABと同じ円の円周上」にある。
- ・ 「円周角∠APB」ということは、「Pは、弧ABと同じ円の円周上」にある。



つまり、 $A \cdot B \cdot C \cdot P$ の4点が、すべてひとつの円の円周上にあるということなんだ。  
 なので、円周角の定理は言い方を変えると「 $A \cdot B \cdot C \cdot P$ の4点が、すべてひとつの円の円周上にある場合、円周角である $\angle ACB = \angle APB$ となる」ということになるよ。

ここまではいいかな？

では、「円周角の定理の逆」とは、これを「逆」にしたものだよ。

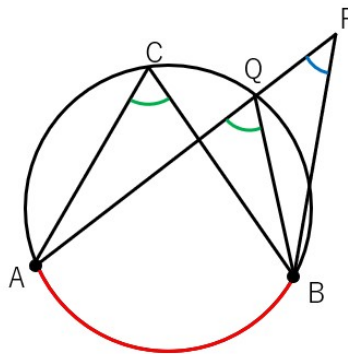
つまり、「円周角である $\angle ACB = \angle APB$ となる場合、 $A \cdot B \cdot C \cdot P$ の4点が、すべてひとつの円の円周上にある」ということなんだ。

これが成り立つかどうかを、今回証明するんだよ。

これが成り立つかどうかを調べるために、点Pが、「円の外側にある場合、円周上にある場合、円の内側にある場合」の3パターンで、それぞれ $\angle APB$ と $\angle ACB$ の関係がどうなるかを確認していくよ。

### 点Pが円の外側にある場合

点Pが円の外側にある場合、次の図のようになるよ。

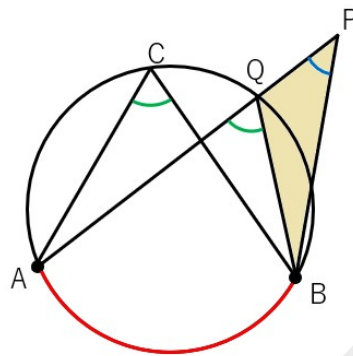


$\angle APB$ と $\angle C$ を比較すると、 $\angle APB$ は小さく見えるよね。

本当に小さいのかどうかを考えていこう。



APと円周の交点をQとして、色の付けた三角形に注目しよう。

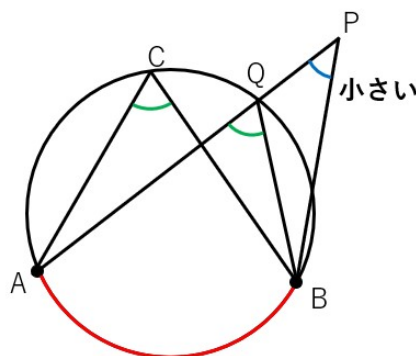


外角の性質から、  
 $\angle APB + \angle PBQ = \angle AQB$  になることがわかるよね。

円周角の定理から、  
 $\angle C = \angle AQB$  だから、さっきの式の  $\angle AQB$  のところを  $\angle C$  にすると  
 $\angle APB + \angle PBQ = \angle C$

ということは、 $\angle APB$  と  $\angle C$  を比べると  $\angle APB$  の方が小さくなることがわかるね。だって、 $\angle APB$  に  $\angle PBQ$  を足してやっと  $\angle C$  になるんだからね。

見た目だけでなく、証明からも「円周の外側にある  $\angle APB$  は円周の角 ( $\angle C$  や  $\angle AQB$ ) に比べて小さくなる」ことがわかるよね。

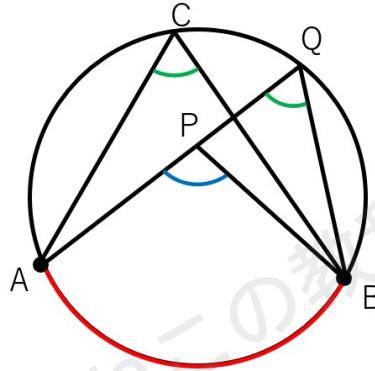


ここで分かった重要ポイントは、「点Pが円の外側にある場合、 $\angle APB$  は  $\angle C$  ( $\angle ACB$ ) よりも小さくなる」ということだよ。



点Pが円の内側にある場合

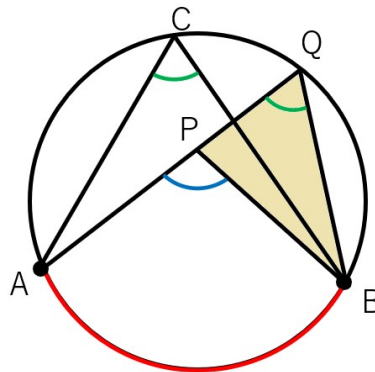
それでは次に点Pが円の内側にある場合を考えてみよう。  
図にあらわすと次のようになるよ。



$\angle APB$ と $\angle C$ を比較すると、 $\angle APB$ は大きく見えるよね。

実際に大きいのかどうか考えていこう。

APと円周の交点をQとして、色の付けた三角形に注目しよう。



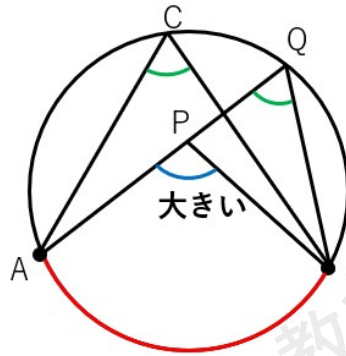
外角の性質から、  
 $\angle AQB + \angle PBQ = \angle APB$ になることがわかるよね。

円周角の定理から、  
 $\angle C = \angle AQB$ だから、さっきの式の $\angle AQB$ のところを $\angle C$ にすると  
 $\angle C + \angle PBQ = \angle APB$

ということは、 $\angle APB$ と $\angle C$ を比べると $\angle APB$ の方が大きくなることがわかるね。だって、 $\angle C$ にさらに $\angle PBQ$ を足して $\angle APB$ になっているからね。



見た目だけでなく、証明からも「円周の内側にある $\angle APB$ は円周の角( $\angle C$ や $\angle AQB$ )に比べて大きくなる」ことがわかるよね。



ここで分かった重要ポイントは、「点Pが円の内側にある場合、 $\angle APB$ は $\angle C$  ( $\angle ACB$ )より大きくなる」ということだよ。

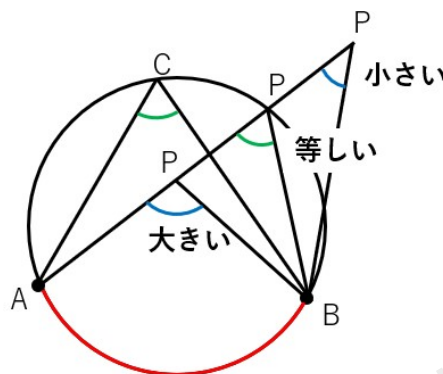
ということは、点Pが円の外側にあっても、内側にあっても、どちらも $\angle APB$ は $\angle C$ と同じにはならないことが分かったね。

つまり、「 $\angle APB$ が $\angle C$ と同じになるということは、点Pは円の円周上にある!」ということが言い切れるんだよ。

### 点Pの位置と角の大きさの関係(まとめ)

点Pの位置と角の大きさの関係をまとめるよ。

- ・点Pが円周より外側にある場合、 $\angle APB$ は $\angle ACB$ より小さい
- ・点Pが円周より内側にある場合、 $\angle APB$ は $\angle ACB$ より大きい
- ・点Pが円周上にある場合、 $\angle APB$ は $\angle ACB$ と等しい(円周角の定理)

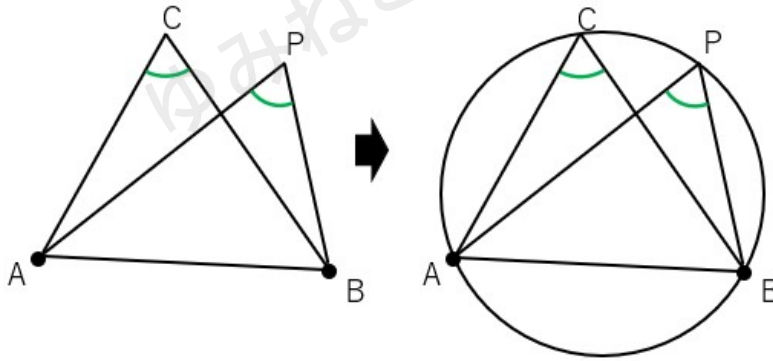


つまり、 $\angle APB = \angle ACB$ なのであれば、 $A \cdot B \cdot C \cdot P$ は同じ円の円周上にあるということが成り立つんだよ。

## 円周角の定理の逆

「円周角の定理の逆」の性質は次のようにまとめることができるよ。

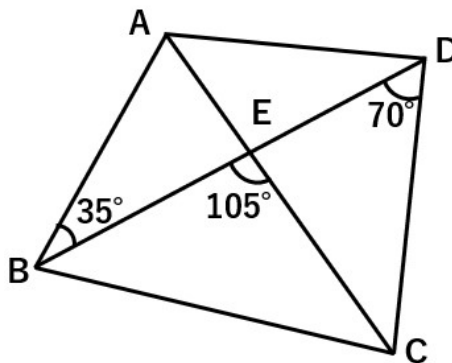
4点A、B、C、Pについて、CとPが同じ側にあって、  
 $\angle C = \angle P$ ならば、  
 4点は1つの円周上にある



## 円周角の定理の逆を使った問題

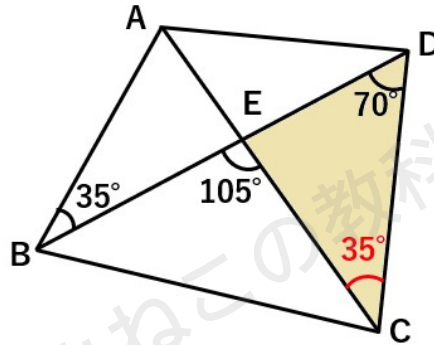
それでは、「円周角の定理の逆」を使った問題にチャレンジしてみよう。

下の図の4点A、B、C、Dは1つの円周上にあることを説明しなさい。



まず $\angle ACD$ の角度を求めてみよう。

色のついた三角形に注目して、外角の性質を使うと、  
 $70 + \angle ACD = 105$ になるから、  
 $\angle ACD = 35^\circ$ と求まるよ。



2点BとCは、ADに対して同じ側にあり、 $\angle ABD = \angle ACD = 35^\circ$ であるから、4点A、B、C、Dは同じ円周上にあることがわかるよ。

### 「円周角の定理の逆」まとめ

円周角の定理の逆

4点A、B、C、Pについて、CとPが同じ側にあって、  
 $\angle C = \angle P$ ならば、  
 4点は1つの円周上にある

