「円周角の定理の逆」とは？
証明と問題の解き方をわかりやすく解説

円周角の定理の逆が成り立つか調べよう

「円周角の定理の逆」が成り立つのかどうか？とは、「円周角の定理」の「１つの弧に対する円周角の大きさは一定」という定理が、逆についても成り立つのかどうかということだよ。

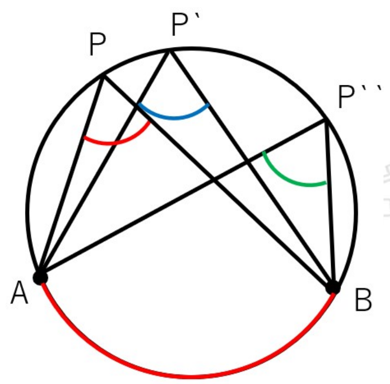
円周角の定理の逆について勉強する前に、まずは一度「円周角の定理」とはどういうことだったかを復習しよう。

円周角の定理の復習

円周角の定理

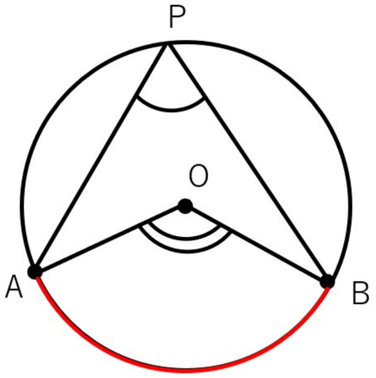
「円周角の定理」とは次の２つのことだよ。

・１つの弧に対する円周角の大きさは一定である。
∠APB＝∠AP’B＝∠AP‘‘B



・１つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分である。

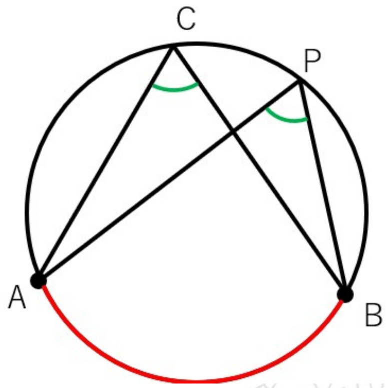
$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$



今回学習する「円周角の定理の逆」は、今復習した2つの「円周角の定理」のうち、「１つの弧に対する円周角の大きさは一定である。」という性質に注目していくよ。

∠Pと∠Cの大きさを比べよう

下の図のように、点Pが円周の上にあると、∠APB＝∠ACB（∠C）になるよね。
まさにこれが「円周角の定理」の性質だよね。



つまり、「弧ABがあり、その円周角である∠Cと∠APBは同じ角度になる」ということだね。
ここで注目して欲しいのは、

・「弧AB」ということは、「AとBはひとつの円の円周上」にある。
・「円周角∠C」ということは、「cは、弧ABと同じ円の円周上」にある。
・「円周角∠APB」ということは、「Pは、弧ABと同じ円の円周上」にある。

つまり、A・B・C・Pの4点が、すべてひとつの円の円周上にあるということなんだ。
なので、円周角の定理は言い方を変えると「A・B・C・Pの4点が、すべてひとつの円の円周上にある場合、円周角である∠ACB＝∠APBとなる」ということになるよ。

ここまではいいかな？

では、「円周角の定理の逆」とは、これを「逆」にしたものだよね。

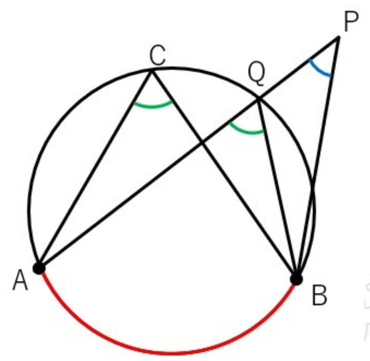
つまり、「円周角である∠ACB＝∠APBとなる場合、A・B・C・Pの4点が、すべてひとつの円の円周上にある」ということなんだ。

これが成り立つかどうかを、今回証明するんだよ。

これが成り立つかどうかを調べるために、点Pが、「円の外側にある場合、円周上にある場合、円の内側にある場合」の3パターンで、それぞれ∠APBと∠ACBの関係がどうなるかを確認していくよ。

点Pが円の外側にある場合

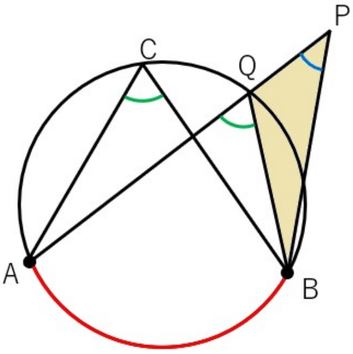
点Pが円の外側にある場合、次の図のようになるよ。



∠APBと∠Cを比較すると、∠APBは小さく見えるよね。

本当に小さいのかどうかを考えていこう。

APと円周の交点をQとして、色の付けた三角形に注目しよう。

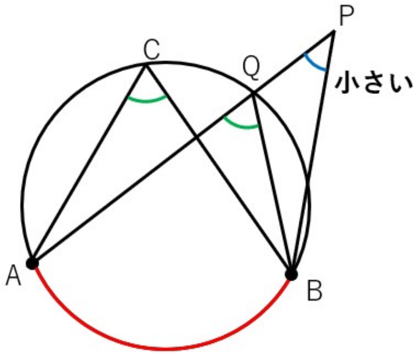


外角の性質から、
∠APB＋∠PBQ＝∠AQBになることがわかるよね。

円周角の定理から、
∠C＝∠AQBだから、さっきの式の∠AQBのところを∠Cにすると
∠APB＋∠PBQ＝∠C

ということは、∠APBと∠Cを比べると∠APBの方が小さくなることがわかるね。だって、∠APBに∠PBQを足してやっと∠Cになるんだからね。

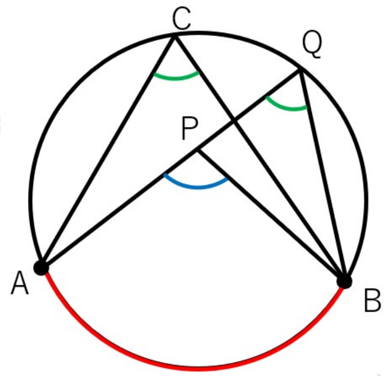
見た目だけでなく、証明からも「円周の外側にある∠APBは円周の角（∠Cや∠AQB）に比べて小さくなる」ことがわかるよね。



ここで分かった重要ポイントは、「点Pが円の外側にある場合、∠APBは∠C（∠ACB）よりも小さくなる」ということだよ。

点Pが円の内側にある場合

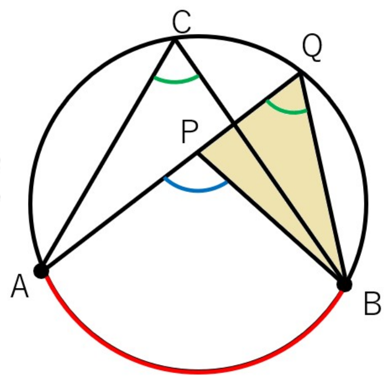
それでは次に点Pが円の内側にある場合を考えてみよう。
図にあらわすと次のようになるよ。



∠APBと∠Cを比較すると、∠APBは大きく見えるよね。

実際に大きいのかどうか考えていこう。

APと円周の交点をQとして、色の付けた三角形に注目しよう。

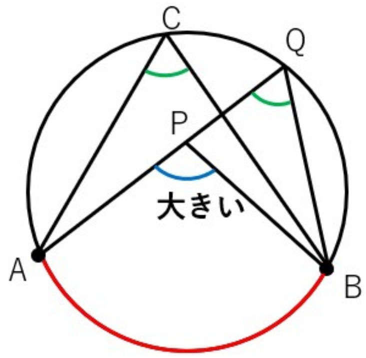


外角の性質から、
∠AQB+∠PBQ=∠APBになることがわかるよね。

円周角の定理から、
∠C=∠AQBだから、さっきの式の∠AQBのところを∠Cにすると
∠C+∠PBQ=∠APB

ということは、∠APBと∠Cを比べると∠APBの方が大きくなることがわかるね。だって、∠Cにさらに∠PBQを足して∠APBになっているからね。

見た目だけでなく、証明からも「円周の内側にある∠APBは円周の角（∠Cや∠AQB）に比べて大きくなる」ことがわかるよね。



ここで分かった重要ポイントは、「点Pが円の内側にある場合、∠APBは∠C（∠ACB）より大きくなる」ということだよ。

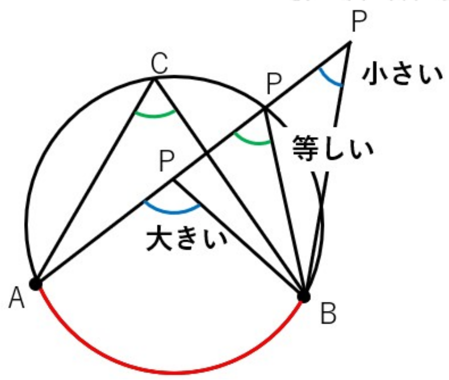
ということは、点Pが円の外側にあっても、内側にあっても、どちらも∠APBは∠Cと同じにはならないことが分かったね。

つまり、「∠APBが∠Cと同じになるということは、点Pは円の円周上にある！」ということが言い切れるんだよ。

点Pの位置と角の大きさの関係（まとめ）

点Pの位置と角の大きさの関係をまとめるよ。

- 点Pが円周より外側にある場合、∠APBは∠ACBより小さい
- 点Pが円周より内側にある場合、∠APBは∠ACBより大きい
- 点Pが円周上にある場合、∠APBは∠ACBと等しい（円周角の定理）

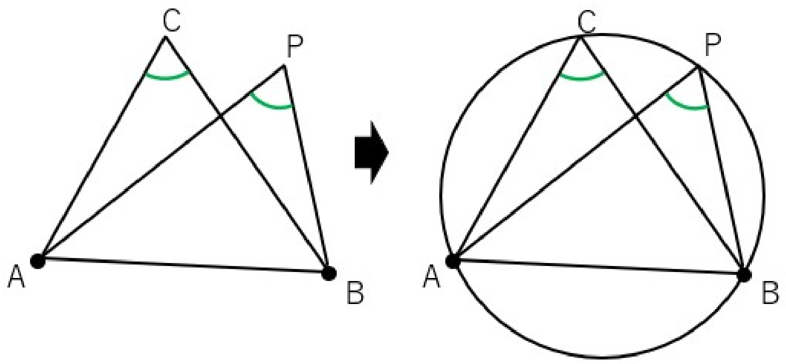


つまり、∠APB＝∠ACBなのであれば、A・B・C・Pは同じ円の円周上にあるということが成り立つんだよ。

円周角の定理の逆

「円周角の定理の逆」の性質は次のようにまとめることができるよ。

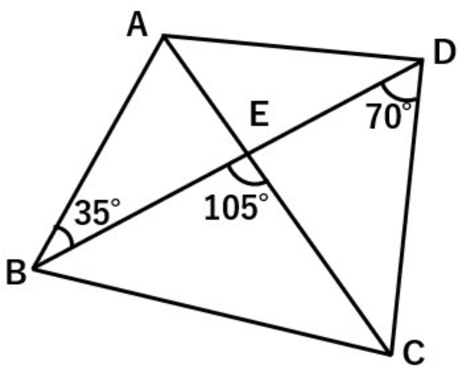
4点A、B、C、Pについて、CとPが同じ側にあって、
∠C＝∠Pならば、
4点は1つの円周上にある



円周角の定理の逆を使った問題

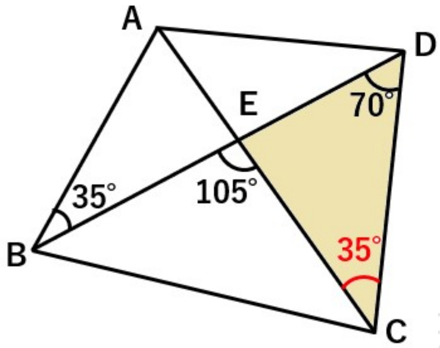
それでは、「円周角の定理の逆」を使った問題にチャレンジしてみよう。

下の図の4点A、B、C、Dは1つの円周上にあることを説明しなさい。



まず∠ACDの角度を求めてみよう。

色のついた三角形に注目して、外角の性質を使うと、
70+∠ACD=105になるから、
∠ACD=35° と求まるよ。



2点BとCは、ADに対して同じ側にあり、∠ABD=∠ACD=35° であるから、4点A、B、C、Dは同じ円周上にあることがわかるよ。

「円周角の定理の逆」まとめ

円周角の定理の逆

4点A、B、C、Pについて、CとPが同じ側にあって、
∠C=∠Pならば、
4点は1つの円周上にある