

「証明のやり方と書き方」のコツは？

証明問題をわかりやすく解説

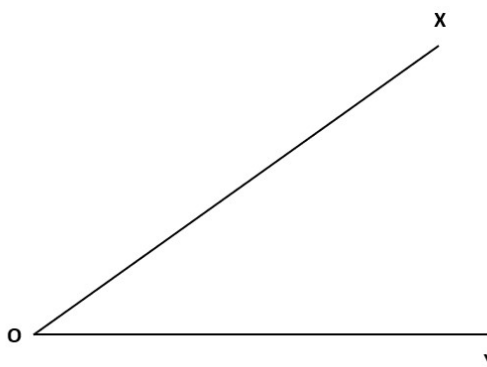
「角の二等分線」の作図を三角形の合同条件を使って証明してみよう

「証明」とは何かを学習してきたけれど、今回はいよいよ実際に「証明」することにチャレンジするよ。

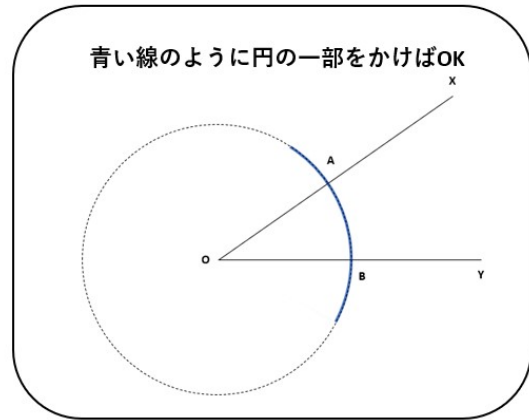
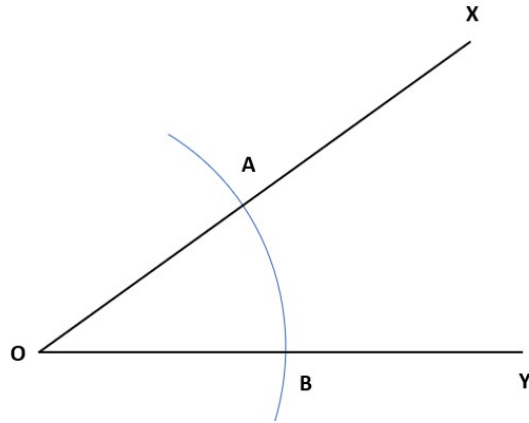
言葉の使い方や用語など、証明にはやり方（書き方）にルールがあって、ちょっとややこしいんだ。

そこで、中学1年生で習った「角の二等分線」を例に「角の二等分線は、本当に角を二等分しているのか？」を証明しながら、証明のやり方や書き方を確認していこう。。

それでは、「下の図の $\angle XOY$ の二等分線」の作図を復習しながら解説していくよ。

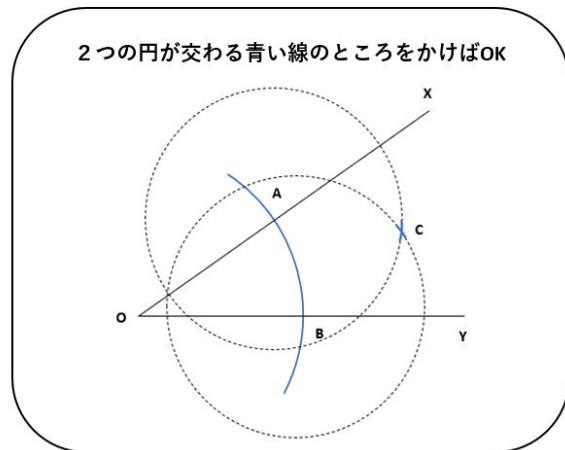
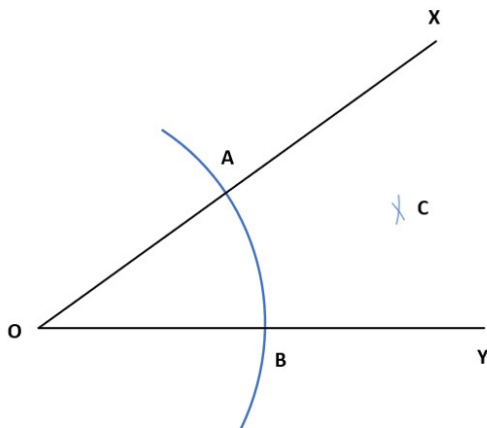


①点Oを中心とする円をかいて、辺OXと辺OYとの交点をA、Bとしよう。



上の図のように、円は辺OXと辺OYと交わる部分だけでOKだよ。

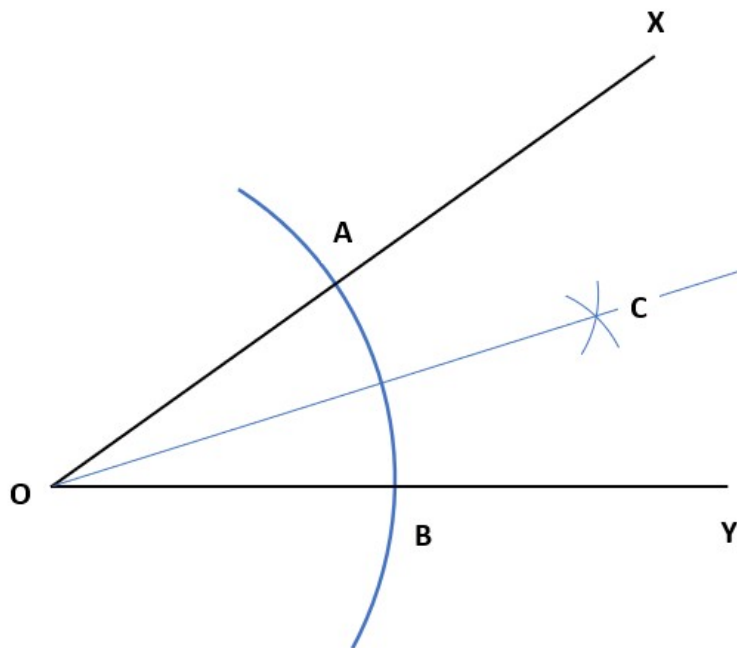
②A、Bを中心とする等しい円をかいて、その交点をCとしよう。



①の時と同じように、円は一部だけかけばOKだよ。



③半直線OCをひいて、角の二等分線の作図は完成だよ。



角の二等分線は、1つの角を二つに等しく分ける線のことなんだけれど、本当にOCが $\angle XOY$ を二つに等しく分けている線か証明を三角形の合同条件を使って確認してみよう。

まず、OCが角の二等分線になるということは、 $\angle AOC$ と $\angle BOC$ が $\angle XOY$ の半分の大きさになっているということだから、

$$\angle AOC = \angle BOC$$

ということが証明すればいいんだ。

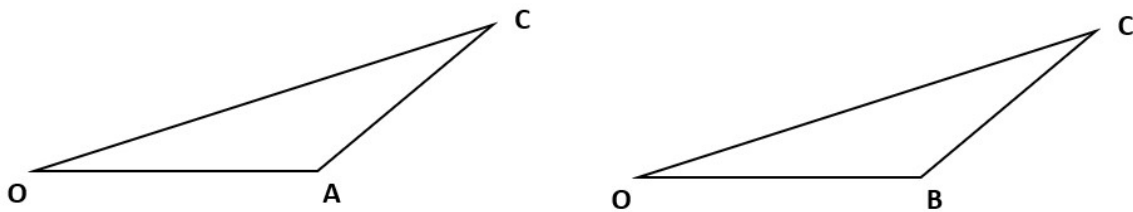
ここで、 $\angle AOC$ と $\angle BOC$ が同じ大きさということを証明するためには、下の図の $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ が合同であることを使って証明をするよ。



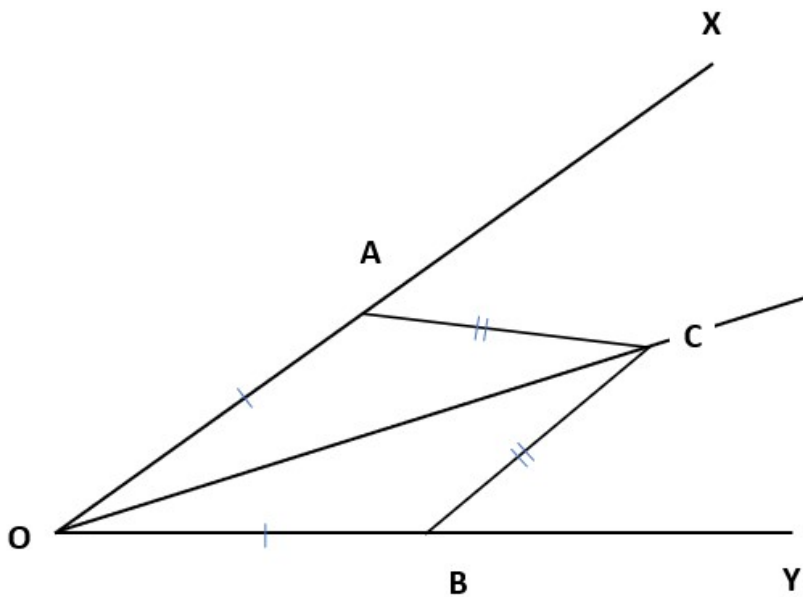
なぜ三角形の合同を使うのか？

角の大きさの証明なのに、なんで三角形の合同を使うのか疑問に思った人もいると思うから説明するね。

それは、 $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ が合同だということが言えたら、 $\angle AOC$ と $\angle BOC$ は2つの三角形でぴったり重なる部分になって、同じ大きさということがいえるから三角形の合同を使うんだ。



上の図のように、2つの三角形を頂点に対応する順にかくとイメージしやすくなるよ。



作図をしていく中で、同じ長さになることがわかるから上の図に印をつけたよ。

・OAとOBについて

AとBは、作図をする時にOを中心とする円をかいて見つけた点だったよね。

作図の手順の①を見てわかるとおり、OAとOBは円の半径になっているから、同じ長さになるだ。



だから $OA=OB$ ということがいえるよ。

・ AC と BC について

次に、 C は作図手順の②を見てみると、 A と B から等しい円をかいて見つけた点だったよね。

つまり、 AC と BC は円の半径になるから、

だから、 $AC=BC$ ということがいえるよ。

・ OC について

そして最後に、 OC を見てみよう。

これは、 $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ の2つの三角形と重なっているから、同じ長さということがわかるね。

今の流れを整理して証明すると下のようになるよ。

$\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ は

$OA=OB$

$AC=BC$

$OC=OC$

で、3組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle AOC \cong \triangle BOC$

合同な図形の対応する角は等しいから、

$\angle AOC = \angle BOC$

したがって、 OC は $\angle XOY$ の二等分線である

これで、角の二等分線について証明をすることができたよ。

ここから証明について、詳しく説明していくね。

「仮定」とは

まずは証明で使われる言葉について説明するね。

1つ目は、「仮定（かてい）」だよ。



証明の問題には、よく「●●●ならば」というフレーズがでてくるんだけど、この「ならば」の前の「●●●」の部分が仮定だよ。

(例)

クマならば動物である。 仮定は、「クマ」

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば、 $\angle ABC = \angle DEF$ 仮定は「 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 」

証明の問題では、仮定をスタート地点として解き進めていくから、仮定がどの部分かを素早く見つけられるようにしよう。

「結論」とは

次に「結論（けつろん）」について説明するね。

さっきの仮定の続きで「●●●ならば□□□」というフレーズがでてくるんだけど、「ならば」の後の「□□□」の部分が結論だよ。

(例)

クマならば動物である。 結論は「動物」

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば、 $\angle ABC = \angle DEF$ 結論は「 $\angle ABC = \angle DEF$ 」

結論は証明するときのゴール地点になるものなんだ。

証明するときには、仮定と結論をセットで毎回確認しよう。

証明のすじ道の考え方

いよいよ証明問題の解き方について確認していくよ。

まずは、証明を解き始める前に、どうやって証明を解き進めていくかという「すじ道」を下の手順で考えていくよ。



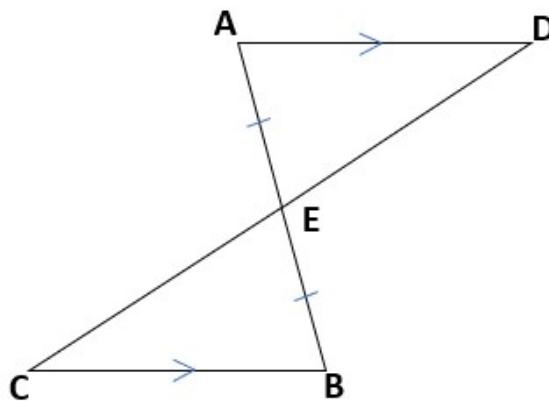
証明の解き進める手順

- ①仮定と結論を問題文から見つけよう。
- ②仮定からわかることを書こう。
- ③すでに正しいと認められていることがらを図形を見て探そう。
- ④三角形の合同条件のどれに当てはまるかを考えよう。
- ⑤結論が証明されたことを書こう。

例題を使って、証明のすじ道を考えて問題を解いてみよう。

例題

下の図は、線分ABとCDの交点をEとして、 $EA=EB$ 、 $AD\parallel CB$ ならば、 $ED=EC$ となることを証明しなさい。



- ①仮定と結論を問題文から見つけよう。

問題文に「 $EA=EB$ 、 $AD\parallel CB$ ならば、 $ED=EC$ 」と書いてあるから、仮定と結論を簡単に見つけることができるね。

仮定 $EA=EB$ 、 $AD\parallel CB$

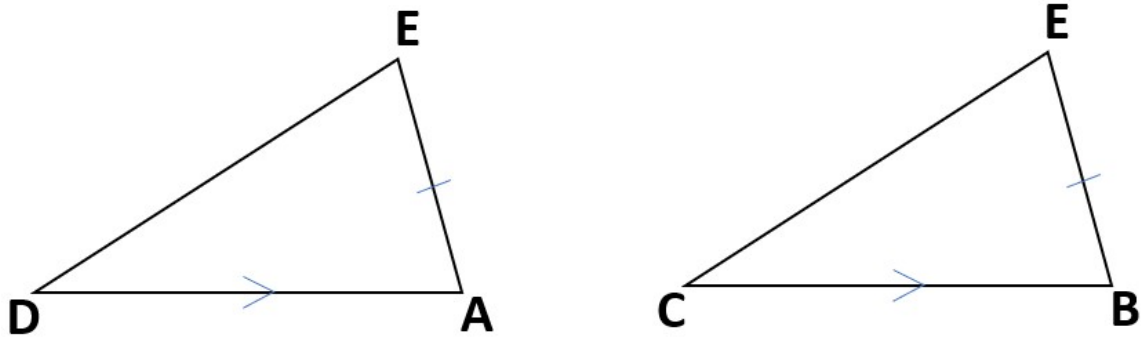
結論 $ED=EC$

また、仮定から結論を導くためには $\triangle AED$ と $\triangle BEC$ が合同であるといえたら、OKだよ。



【重要】

証明が苦手な人は、合同を証明する2つの三角形を同じ向きで書き抜くと対応する順や使う合同条件が探しやすくなるよ。



②仮定からわかることを書こう。

仮定からわかることは、

$$EA = EB$$

$$AD \parallel CB$$

の2つなんだけれど、ここで注意が必要だよ。

$AD \parallel CB$ のように、仮定で平行線が出てきた時には、問題文には書かれていない等しいものがあるんだ。

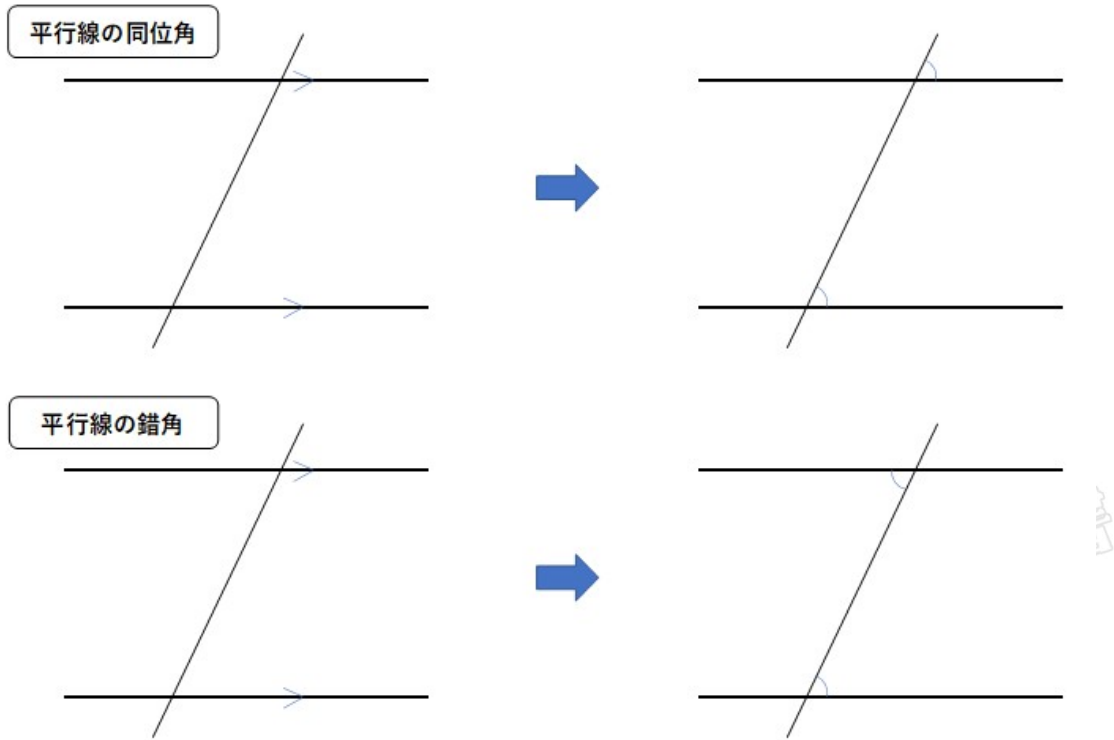
それは

平行線の錯角は等しい

平行線の同位角は等しい

という2つのことなんだ。





どちらを使うかは問題の図を見て考えるんだけど、『平行線の錯角は等しい』という性質を使うことが多いよ。

今回の問題では

$$EA = EB$$

$AD \parallel CB \Rightarrow$ 平行線の錯角は等しいので、 $\angle EAD = \angle EBC$ 、 $\angle EDA = \angle ECB$

ということがいえるよ。

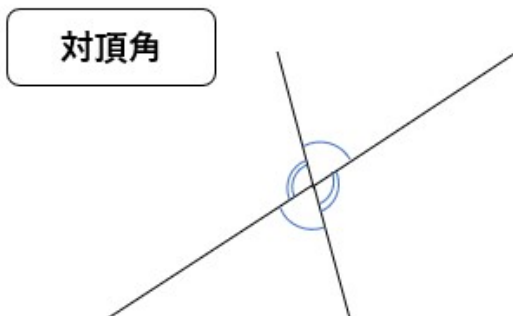
③すでに正しいと認められていることから図形を見て探そう。

言葉だけを聞くと、どういうことか少しわかりにくいよね。
これは、図形の性質から絶対に正しいといえることを見つける、ということだよ。

今回の問題の図形では、対頂角が等しいという性質を使って
 $\angle AED = \angle BEC$

ということがいえるよ。

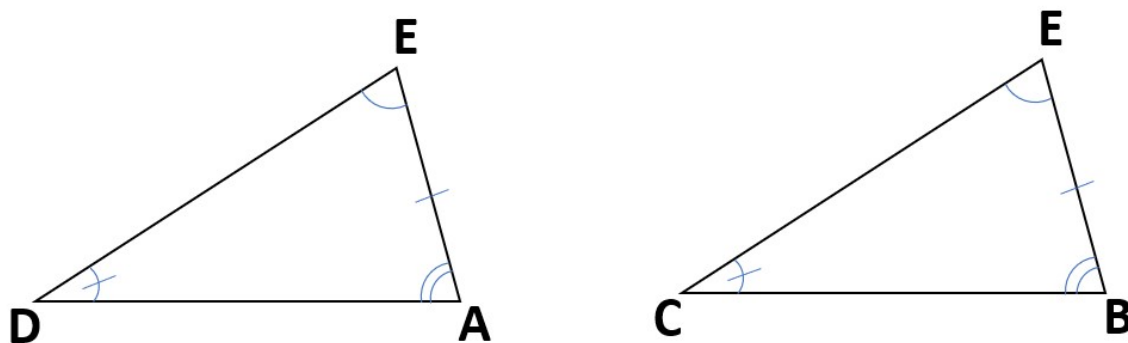




※証明の問題でよく使われる根拠の根拠・条件は一覧にして、このページの最後に書いてあるから確認していこう！

④三角形の合同条件のどれに当てはまるかを考えよう。

ここまで確認した2つの三角形の中で等しい所にマークをつけよう。



上の2つの三角形を見て、当てはまる合同条件を考えよう。

そうすると

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

に当てはまるのがわかるね。

※ $\angle EDA$ と $\angle ECB$ は大きさが等しいけれども、合同条件を考える時に必要ない角だから、証明を書くときには『 $\angle EDA = \angle ECB$ 』を書かないので注意しよう。



⑤結論が証明されたことを書こう。

これで2つの三角形が合同ということが証明できたから、最後の総仕上げ！
2つの三角形が合同だから、角や辺が等しいという時に使うフレーズがあるから、必ず覚えよう。

それは、

合同な図形の対応する辺は等しいから
合同な図形の対応する角は等しいから

というフレーズだよ。

今回は、 $ED=EC$ を証明するから、『合同な図形の対応する辺は等しいから』というフレーズを使おう。

ここまで来たらあとは、これまでのことを整理して証明を書いていくよ。

例題の証明

$\triangle AED$ と $\triangle BEC$ において

仮定から、 $EA=EB$ ・・・①

$AD\parallel CB$ より平行線の錯角は等しいから、 $\angle EAD=\angle EBC$ ・・・②

対頂角は等しいから、 $\angle AED=\angle BEC$ ・・・③

①、②、③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AED\equiv\triangle BEC$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$ED=EC$

証明は上のように解き進めていくんだ。

最初のうちは、証明でよく使われる『～において』や『合同な図形の対応する～』という言葉が書き慣れないかもしれないけれど、何度も問題にチャレンジしていくうちに覚えることができるから、諦めずに取り組もう！

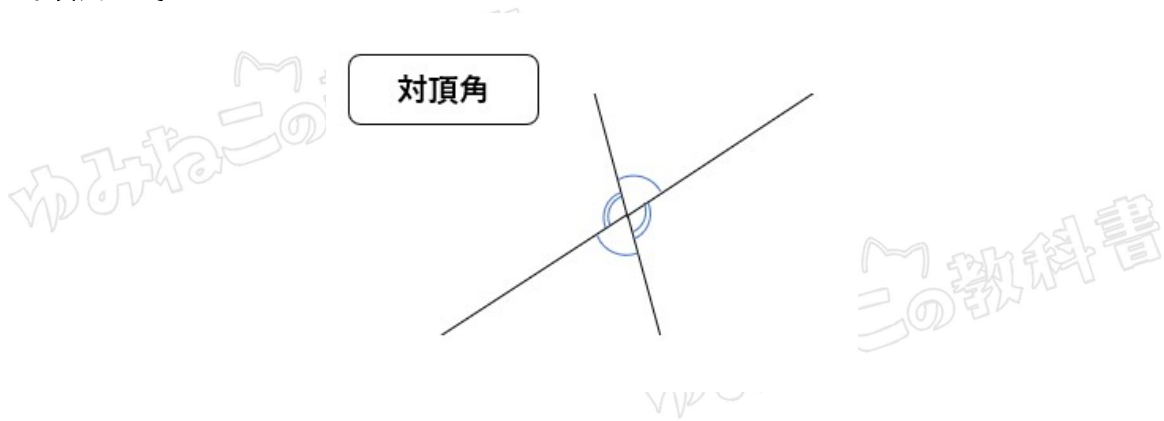
また、穴埋め問題で演習をして慣れていくこともおすすめだよ。



よく使われる証明の根拠・条件一覧

対頂角の性質

- ・ 対頂角は等しい

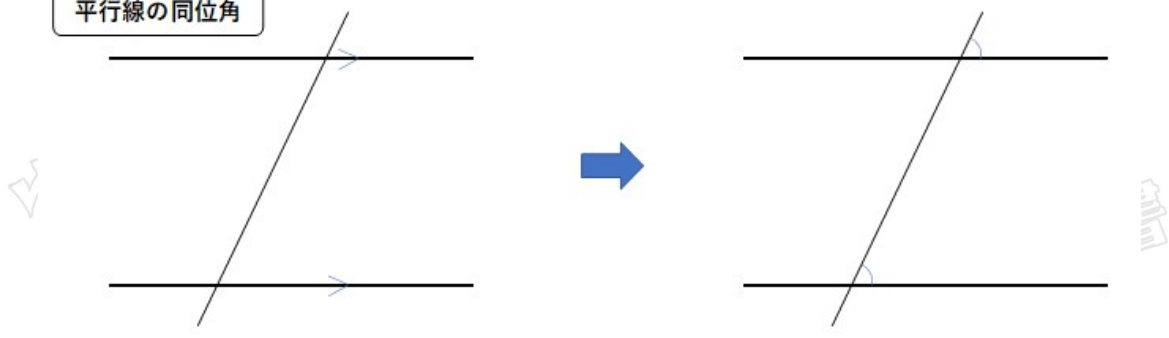


平行線の性質

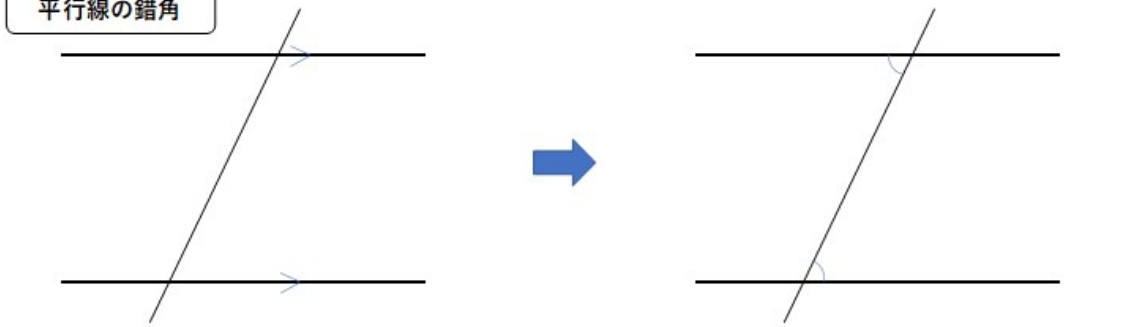
2直線に1つの直線が交わる時、

- ・ 2直線が平行ならば、同位角は等しい
- ・ 2直線が平行ならば、錯角は等しい

平行線の同位角



平行線の錯角



平行線になるための条件

2直線に1つの直線が交わる時、

- ・ 同位角が等しければ、その2直線は平行である
- ・ 錯角が等しければ、その2直線は平行である

三角形の内角の性質

- ・ 三角形の内角の和は 180° である

三角形の外角の性質

- ・ 三角形の外角は、それととなり合わない2つの内角の和に等しい

合同な図形の性質

- ・ 合同な図形では、対応する線分は等しい
- ・ 合同な図形では、対応する角は等しい

三角形の合同条件

- 3組の辺がそれぞれ等しい
- 2組の辺と、その間の角がそれぞれ等しい
- 1組みの辺と、その両端の角がそれぞれ等しい



「証明のやり方と書き方」まとめ

- ・ 証明の問題の「●●●ならば」の「ならば」の前の「●●●」の部分が仮定
- ・ 仮定の続きで「●●●ならば□□□」の「ならば」の後の「□□□」の部分が結論

証明の解き進める手順

- 1 仮定と結論を問題文から見つけよう。
 - 2 仮定からわかることを書こう。
 - 3 すでに正しいと認められていることがらを図形を見て探そう。
 - 4 三角形の合同条件のどれに当てはまるかを考えよう。
 - 5 結論が証明されたことを書こう。
- ・ よく使う「合同な図形の対応する辺は等しいから」
 - 「合同な図形の対応する角は等しいから」というフレーズを覚えよう

