

比例・反比例とは？

「 y は x に比例・反比例する」比例定数の求め方

比例とは

小学校でも比例については勉強したね。

比例ってというのは、

「一方が2倍3倍になると、もう一方も2倍・3倍になる関係のこと」だったよね。

イメージしやすいように、身の回りの比例の例を2つ紹介するね。

身の回りの比例の例①

「リンゴを買う個数」と「リンゴの値段」

八百屋さんで、リンゴを買う時を考えてみよう。

買うリンゴの個数が1個なら、1個分の値段。

リンゴが2個（1個の2倍）なら、値段も2個分（1個分の2倍）になるね。

一方が2倍・3倍になると、もう一方も2倍・3倍になっているね。

だから「リンゴを買う個数と、リンゴの値段」は比例の関係だね。

リンゴの個数と値段は比例の関係



実際に金額を計算してみよう。

リンゴがもし1個100円だったら、2個で200円、3個で300円。



「リンゴを買う個数が2倍・3倍」になったら、ちゃんと「リンゴの値段も2倍・3倍」になっているね。

表でも確認してみよう。

リンゴの個数(個)	0	1	2	3	4	5
値段(円)	0	100	200	300	400	500

表にすると、さらに比例の関係であることがよくわかるね。

さて、小学校で習った比例だけれど、どうしてまた中学校でも学習するのかというと、この「比例の関係」を、中学の数学では「文字」を使って考えるんだ。中学数学では、「文字を使った式」が使えるようになっているからね。

では、この「リンゴを買った個数」と「リンゴの値段」の関係を、文字を使って表してみよう。

「リンゴの買った個数」を x 、
 「リンゴの値段」を y とするよ。

すると、下のような表ができるね。

x (個)	0	1	2	3	4	5	$\times 100$
y (円)	0	100	200	300	400	500	

この表をみると、 x と y の関係ってどうなっているかな。
 そう、上の段 (x) を 100 倍すると、下の段 (y) になっているね。



なので、 x と y の関係は、 $y = 100x$ と表すことができるんだ。

この式の形をよく覚えておいてね。

では、次の例も見てみよう。

身の回りの比例の例②

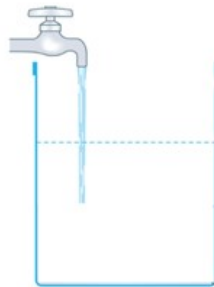
「水を入れている時間」と「水の深さ」

水道の蛇口をひねった時、1分で2cmずつ水が入るとするよ。

2分経ったら水の深さは4cm、3分経ったら、水の深さは6cmだよ。

「水を入れている時間」が2倍・3倍になると、「水の深さ」も2倍・3倍になることがわかるかな。

水を入れる時間と深さは比例の関係



これも、表で確認しよう。

時間 (分)	0	1	2	3	4	5
深さ (cm)	0	2	4	6	8	10



表で確認してみても、比例の関係であることがよくわかるね。
 それでは、中学生らしく「文字」を使って考えてみよう。

「水を入れる時間」を x 、
 「水の深さ」を y とするよ。
 すると、下のような表ができるね。

x (分)	0	1	2	3	4	5	× 2
y (cm)	0	2	4	6	8	10	

今度は、上の段 (x) を 2 倍すると、下の段 (y) になっているね。

なので、 x と y の関係は、 $y = 2x$ と表せる。

さっきのリンゴのケースでは、「 $y = 100x$ 」で表せたね。
 そして、今度は「 $y = 2x$ 」。
 なんだか形が似ていることに気が付いたかな？

さっきの「 $y =$ 比例の式の形 「 $y = a x$ 」
 $100x$ 」とか「 $y = 2x$ 」は、比例の式の形なんだよ。

x の前の「 100 」とか、「 2 」は、そのときどきで数字が変わるよね。
 なので、この「そのときどきで変わる数字」をひとまず「 a 」であらわしちゃうんだ。

そうすると、

比例の式の形は「 $y = a x$ 」と表すことができるよ。

この a の部分に、そのときどきでいろんな数字が入るんだね。

では実際に問題に挑戦してみよう。



(問) 次の中で、 y が x に比例しているものを選びなさい。

ア： $y = 2x$

イ： $y = \frac{3}{x}$

ウ： $y = 2x + 3$

エ： $y = 2x^2$

答えは「ア」。

「ア」だけが $y = ax$ の形になっているので正解になるよ。

余裕があったら読んでみよう！

(おまけ：2年生で学習すること)

さっきの水の入れる時間と深さの問題を例に考えよう。

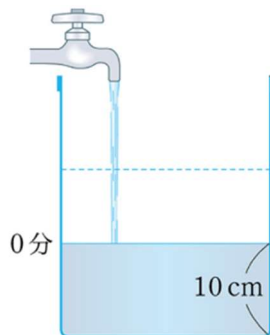
水を入れている時間が「0分」のとき、水の深さは「0cm」なのはわかるよね。だって、0分のときは、まだ容器の中に水が入っていないんだから当たり前だよ。

1年生の数学では、「容器が空っぽの状態」からスタートする式しか学習しないけれど、2年生になると、「容器の中に、あらかじめ水が入っている状態」からスタートする式を学習したりするよ。

たとえば、「すでに深さ10cmの水が入っている容器」に、1分間に2cmずつ水を入れた場合、「水を入れている時間」と「水の深さ」はどんな式になるだろう。

答えは、 $y = 2x + 10$ 。

さっきの式に、「10cm」の「10」が足されるんだね。



どうしてこんな話をしたかという、この「 $y = 2x + 10$ 」は、「一次関数」の式なんだ。

比例の式は「 $y = 2x$ 」だよ。

とっても似ているよね。

だから、「比例と一次関数の違いって？」と混乱してしまうことがよくあるんだ。

比例は、実は「一次関数」の仲間だよ。ただ、一次関数の「 $+10$ 」のように、余計な？部分が無いものが「比例」なんだ。

2年生の数学でもくわしく学習することになるけれど、せっかくだからちょっと覚えておいてね。

比例定数とは

教科書の説明では「一定の数やそれを表す文字を定数と言い、比例の式の中の文字 a は定数であり「比例定数」と呼ぶ。」と書かれているね。

「比例定数」なんて、かしこまった言葉で言われると、なんだか難しそうに聞こえるけれど、実はすごく簡単なことを言っているだけなんだ。

ここまで学習してきたように、比例は必ず $y = ax$ の形で表されるんだよね。この「 a 」の部分だけが式によって変わるんだから、この「 a 」の部分ってとても需要だよ。 (だって、のこりの y と x は変わらないからね)

この「 a 」のことを「比例定数」っていうんだ。

比例の式の重要な「 a 」に分かりやすいように名前をつけてあげただけだね。

なぜ「比例定数」という名前なのかという、 「リンゴの例え」では、リンゴを何個買ってもかならず y は x の「100倍」だったよね。

「水の例え」でも、水を何分入れようか、何時間入れようか、かならず y は x の「2倍」だったよね。

2つの例とも、「リンゴを買った数」とか、「最終的なリンゴの値段」とか、「水を入れた時間」とか、「水の深さ」って、そのときどきで変わるよね。



でも、この「100」という数字と「2」という数字はずっと「一定」のまま。

そう、「一定のままの数字」だから「定数」なんだ。

そして、「比例の式の中で、ずっと一定のままの数」だから、「比例定数」だよ。

では、問題でも確認してみよう。

(問) 次の比例の式の比例定数をそれぞれ答えなさい。

ア： $y = 2x$

イ： $y = -3x$

ウ： $y = x$

エ： $y = \frac{1}{3}x$

答えを確認しよう。

比例定数は $y = ax$ の「 a 」だよね。

x の前の係数が「 a 」にあたるから、それをそのまま答えればOK。

ア：2

イ：-3

ウ：1 (x の前には「1」が省略されている)

エ： $\frac{1}{3}$

比例定数の求め方

教科書には「 y が x に比例するとき、 $y \div x$ で比例定数が求まる」と書かれているよ。

比例定数の求め方には「 $y \div x$ 」を計算すればいいということだね。

でも、なぜそうなるかを考えてみよう。



さっきの「水の例」の表をもう一度見てみよう。

「x」を2倍したら「y」になっているね。つまり「 $y = 2x$ 」と表すことができ、この「2」が比例定数だったんだよね。

x (分)	0	1	2	3	4	5	× 2
y (cm)	0	2	4	6	8	10	

この「2」という数字は、「y」を「x」で割れば出てくることは分かるかな？

① $x = 1$ 、 $y = 2$ のところに注目しよう。

$$\begin{aligned} y \div x \\ &= 2 \div 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

② $x = 2$ 、 $y = 4$ のところに注目しよう

$$\begin{aligned} y \div x \\ &= 4 \div 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

①のときも②のときも比例定数は $y \div x$ で求められているね。

「x」に、ある数をかけた結果が「y」なんだから、「ある数」を求めたいのであれば、「y」を「x」で割ればいいよね。

だから、 $y \div x$ で「ある数 = 比例定数」が求まるんだね。



では問題に挑戦してみよう。

(問) y は x に比例しており、 $x = 3$ のとき、 $y = 9$ になる。
比例定数を求めよ。

比例の比例定数は $y \div x$ で求まるから、

比例定数 $a = 9 \div 3 = 3$ になるね。

「比例定数」なんて難しい言葉に感じるけれど、実際に学習してみるとそんなに難しいことではないね。

だけれどここから先、1年生では「反比例」、2年生は「1次関数」、3年生では「二乗に比例する関数」というのをやるので、ごっちゃになっちゃう人が多いんだ。

なので、ここでしっかりと押さえておこうね。

反比例とは

反比例も小学校で勉強したと思うよ。

反比例というのは、「一方が2倍・3倍になると、もう一方は1/2倍・1/3倍になる関係のこと」だったよね。

身の回りの反比例の例を紹介するね。

身の回りの反比例の例

「分ける人数」と「1人分の個数」

みかんが6個あったとするよ。1人で分けたら、1人分の個数は6個になるよね。いわゆる独り占めってやつだね。

2人で分けたら、1人分の個数は3個

3人で分けたら、1人分の個数は2個



6人で分けたら、1人分の個数は1個

表にまとめてみよう。4人と5人の時は切りよく分けられないので、空欄にしたよ。

分ける人数 (人)	1	2	3	4	5	6
1人の個数 (個)	6	3	2			1

分ける人数 (人)	1	2	3	4	5	6
1人の個数 (個)	6	3	2			1

「分ける人数」と「1人分の個数」は反比例の関係であることがよくわかるね。

では、中学生らしく「文字」を使って考えてみよう。

「分ける人数」を x 、「1人分の個数」を y とすると次のような表ができるよ。

x (人)	1	2	3	4	5	6
y (個)	6	3	2			1

$x \times y = 6$ になっている

今度は、上の段 (x) と下の段 (y) をかけたら「6」になっているね。



$x \times y = 6$ を、移項を使って「 y を求めるための式」に変えてみよう。

$$y = 6 \div x$$

もう少し整理して

$$y = \frac{6}{x}$$

という式になるよ。

比例の式の形「 $y = \frac{a}{x}$ 」

さっきの $y = \frac{6}{x}$ がまさに反比例の式の形なんだ。

反比例の式の形は $y = \frac{a}{x}$ と表されるよ。

比例の式と同じで、この「 a 」にはその式によって色々な数字が入るよ。

実際に問題に挑戦してみよう。

(問) 次の中で、 y が x に反比例しているものを選びなさい。

ア： $y = 2x$

イ： $y = \frac{3}{x}$

ウ： $y = 2x + 3$

エ： $y = 2x^2$

答えは「イ」。

「イ」だけが $y = \frac{a}{x}$ の形になっているので反比例の式になっているよ。



反比例の比例定数

これがちょっと紛らわしいところなんだけど、

反比例でも「比例定数」っていうんだ。反比例の比例定数は、反比例の式 $y = a x$ の「 a 」のことをいうよ。

余裕があったら読んでみよう！

どうして反比例なのに「比例定数」っていうの？

$y = a x$ の式を、よーく見てみよう。

これって、実は $y = a \times 1 x$ と書くこともできるよね。

これって、比例の式「 $y = a x$ 」が「 y は x に比例している」と言うのに対して、「 $y = a \times 1 x$ 」は「 y は $1 x$ に比例している」と言うことができるという事なんだ。

たとえるなら、

「私は、ピーマンの入った料理が好き」 = 「ピーマンが好き」
という状態が「比例」だったとしたら、

「私は、ピーマンの入った料理が嫌い」 = 「ピーマンが嫌い」
という状態が「反比例」だとするよ。

でも反比例の「ピーマンが嫌い」という状態を説明するのに、

「私は、ピーマンの入っていない料理が好き」 = 「ピーマンが嫌い」
と言い換えることができるよね。

この感覚とおなじ。

「 y は x に比例している」の反対である「 y は x に反比例している」は、「 y は $1 x$ に比例している」と言い換えることができるということ。

なので、反比例の状態も「比例」のひとつと考えて、 a のことを「比例定数」と呼ぶ、と考えることができるよ。



では、実際に問題を解いてみよう。

(問) 反比例の式で比例定数をそれぞれ答えなさい。

ア： $y = \frac{2}{x}$

イ： $y = -\frac{3}{x}$

ウ： $y = \frac{1}{x}$

答えを確認しよう。

反比例の比例定数は $y = \frac{a}{x}$ の「a」だから分子にある数を見たらいいよ。

ア：2

イ：-3

ウ：1

反比例の比例定数の求め方

教科書には「yがxに反比例するとき、 $x \times y$ で反比例の比例定数が求まる」と書かれているよ。

反比例の比例定数の求め方は $x \times y$ で計算すればいいんだけど、なんでそうなるかを考えてみよう。

「みかんを分ける例」の表を確認すると、xとyをかけたら比例定数である「6」になっているのがわかるね。

x (人)	1	2	3	4	5	6
y (個)	6	3	2			1

$x \times y = 6$ になっている



このように、 x と y で反比例の比例定数が求まるよ。

では、問題を解いてみよう。

(問) y は x に反比例するとき、 $x = 3$ のとき、 $y = 9$ になる。比例定数を求めよ。

反比例の比例定数は x と y をかけたものだったから、

比例定数 $a = 3 \times 9 = 27$ になるね。

まとめ

比例や反比例とは、 x と y がどういう関係なのか。比例定数とは何で、どうやって求められるのか。

比例・反比例はごっちゃになってしまいがちだから下にまとめたよ。

比例と反比例

- ・ 比例の式は「 $y = a \times x$ 」
比例定数「 a 」は「 $y \div x$ 」で求めることができる
- ・ 反比例の式は「 $y = a / x$ 」
比例定数「 a 」は「 $x \times y$ 」で求めることができる



自然数に0が含まれるかどうか迷ったら

「象やキリンのイラストのカード」だけを使って、「象が0匹」という状態を説明できるかどうか考えよう!

「説明できない」ということは、「自然数」ではないということ!

