比例・反比例とは？
「ｙはｘに比例・反比例する」比例定数の求め方

比例とは

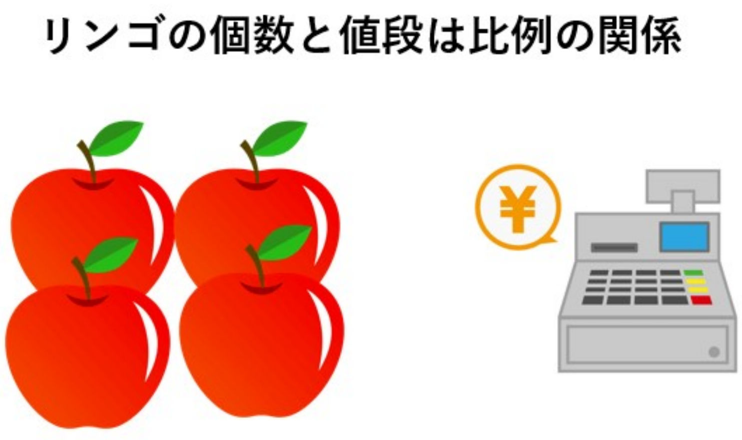
小学校でも比例については勉強したね。
比例っていうのは、
「一方が２倍３倍になると、もう一方も２倍・３倍になる関係のこと」だったよね。

イメージしやすいように、身の回りの比例の例を２つ紹介するね。

身の回りの比例の例①
「リンゴを買う個数」と「リンゴの値段」

八百屋さんで、リンゴを買う時を考えてみよう。
買うリンゴの個数が１個なら、１個分の値段。
リンゴが２個（１個の２倍）なら、値段も２個分（１個分の２倍）になるね。

一方が２倍・３倍になると、もう一方も２倍・３倍になっているね。
だから「リンゴを買う個数と、リンゴの値段」は比例の関係だね。



実際に金額を計算してみよう。
リンゴがもし１個１００円だったら、２個で２００円、３個で３００円。

「リンゴを買う個数が２倍・３倍」になったら、ちゃんと「リンゴの値段も２倍・３倍」になっているね。

表でも確認してみよう。

２倍　３倍

リンゴの個数（個）	0	1	2	3	4	5
値段（円）	0	１００	２００	３００	４００	５００

２倍　３倍

表にすると、さらに比例の関係であることがよくわかるね。

さて、小学校で習った比例だけれど、どうしてまた中学校でも学習するのかというと、
この「比例の関係」を、中学の数学では「文字」を使って考えるんだ。
中学数学では、「文字を使った式」が使えるようになっているからね。

では、この「リンゴを買った個数」と「リンゴの値段」の関係を、文字を使って表してみよう。

「リンゴのを買った個数」をｘ、
「リンゴの値段」をｙとするよ。

すると、下のような表ができるね。

x（個）	0	1	2	3	4	5
y（円）	0	１００	２００	３００	４００	５００

×１００

この表をみると、ｘとｙの関係ってどうなっているかな。
そう、上の段（ｘ）を１００倍すると、下の段（ｙ）になっているね。

なので、ｘとｙの関係は、ｙ＝１００ｘと表すことができるんだ。

この式の形をよく覚えておいてね。

では、次の例も見てみよう。

身の回りの比例の例②
「水を入れている時間」と「水の深さ」

水道の蛇口をひねった時、１分で２ｃｍずつ水が入るとするよ。

２分経ったら水の深さは４ｃｍ、３分経ったら、水の深さは６ｃｍだよね。

「水を入れている時間」が２倍・３倍になると、「水の深さ」も２倍・３倍になることがわかるかな。

水を入れる時間と深さは比例の関係

これも、表で確認しよう。

2倍　3倍

時間（分）	0	1	2	3	4	5
深さ（cm）	0	2	4	6	8	１０

2倍　3倍

表で確認してみても、比例の関係であることがよくわかるね。
それでは、中学生らしく「文字」を使って考えてみよう。

「水を入れる時間」をｘ、
「水の深さ」をｙとするよ。
すると、下のような表ができるね。

x (分)	0	1	2	3	4	5
y (cm)	0	2	4	6	8	1 0

×２

今度は、上の段（ｘ）を２倍すると、下の段（ｙ）になっているね。

なので、ｘとｙの関係は、ｙ＝２ｘと表せる。

さっきのリンゴのケースでは、「ｙ＝100ｘ」で表せたね。
そして、今度は「ｙ＝２ｘ」。
なんだか形が似ていることに気が付いたかな？

比例の式の形「ｙ＝ａｘ」

さっきの「ｙ＝１００ｘ」とか「ｙ＝２ｘ」は、比例の式の形なんだよ。

ｘの前の「１００」とか、「２」は、そのときどきで数字が変わるよね。
なので、この「そのときどきで変わる数字」をひとまず「ａ」であらわしちゃうんだ。

そうすると、

比例の式の形は「ｙ＝ａｘ」と表すことができるよ。

このａの部分に、そのときどきでいろんな数字が入るんだね。

では実際に問題に挑戦してみよう。

（問）次の中で、ｙがｘに比例しているものを選びなさい。

ア：$y=2x$
イ：$y=\frac{3}{x}$
ウ：$y=2x+3$
エ：$y=2x^2$

答えは「ア」。
「ア」だけがｙ＝ａｘの形になっているので正解になるよ。

余裕があったら読んでみよう！
（おまけ： 2年生で学習すること）

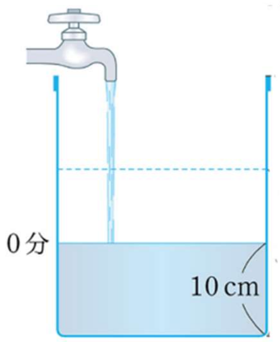
さっきの水の入れる時間と深さの問題を例に考えよう。
水を入れている時間が「０分」のとき、水の深さは「０ｃｍ」なのはわかるよね。だって、０分のときは、まだ容器の中に水が入っていないんだから当たり前だよね。

１年生の数学では、「容器が空っぽの状態」からスタートする式しか学習しないけれど、２年生になると、「容器の中に、あらかじめ水が入っている状態」からスタートする式を学習したりするよ。

たとえば、「すでに深さ10cmの水が入っている容器」に、１分間に２cmずつ水を入れた場合、「水を入れている時間」と「水の深さ」はどんな式になるだろう。

答えは、$y=2x+10$。

さっきの式に、「１０cm」の「１０」が足されるんだね。



どうしてこんな話をしたかというと、この「ｙ＝２ｘ＋１０」は、「一次関数」の式なんだ。
比例の式は「ｙ＝２ｘ」だよね。
とっても似ているよね。
だから、「比例と一次関数の違いって？」と混乱してしまうことがよくあるんだ。
比例は、実は「一次関数」の仲間だよ。ただ、一次関数の「＋１０」のように、
余計な？部分が無いものが「比例」なんだ。

２年生の数学でもくわしく学習することになるけれど、せっかくだからちょっと覚えておいてね。

比例定数とは

教科書の説明では「一定の数やそれを表す文字を定数と言い、比例の式の中の文字aは定数であり「比例定数」と呼ぶ。」と書かれているね。

「比例定数」なんて、かしこまった言葉で言われると、なんだか難しそうに聞こえるけれど、実はすごく簡単なことを言っているだけなんだ。

ここまで学習してきたように、比例は必ずｙ＝ａｘの形で表されるんだったよね。この「ａ」の部分だけが式によって変わるんだから、この「ａ」の部分ってとても需要だよね。（だって、のこりのｙとｘは変わらないからね）

この「ａ」のことを「比例定数」っていうんだ。
比例の式の重要な「ａ」に分かりやすいように名前をつけてあげただけだね。

なぜ「比例定数」という名前なのかというと、「リンゴの例え」では、リンゴを何個買ってもかならずｙはｘの「１００倍」だったよね。

「水の例え」でも、水を何分入れようが、何時間入れようが、かならずｙはｘの「２倍」だったよね。

２つの例とも、「リンゴを買った数」」とか、「最終的なリンゴの値段」とか、「水を入れた時間」とか、「水の深さ」って、そのときどきで変わるよね。

でも、この「１００」という数字と「２」という数字はずっと「一定」のまま。

そう、「一定のままの数字」だから「定数」なんだ。

そして、「比例の式の中で、ずっと一定のままの数」だから、「比例定数」だよ。

では、問題でも確認してみよう。

（問）次の比例の式の比例定数をそれぞれ答えなさい。

ア：ｙ＝２ｘ
イ：ｙ＝－３ｘ
ウ：ｙ＝ｘ
エ：ｙ＝$\frac{1}{3}$ｘ

答えを確認しよう。

比例定数はｙ＝ａｘの「ａ」だよね。
ｘの前の係数が「ａ」にあたるから、それをそのまま答えればＯＫ。

ア：２
イ：－３
ウ：１（ｘの前には「１」が省略されている）
エ：$\frac{1}{3}$

比例定数の求め方

教科書には「ｙがｘに比例するとき、ｙ÷ｘで比例定数が求まる」と書かれているよ。

比例定数の求め方には「ｙ÷ｘ」を計算すればいいということだね。

でも、なぜそうなるかを考えてみよう。

さっきの「水の例」の表をもう一度見てみよう。
「ｘ」を２倍したら「ｙ」になっているね。つまり「ｙ＝２ｘ」と表すことができて、この「２」が比例定数だったんだよね。

x（分）	0	1	2	3	4	5
y（cm）	0	2	4	6	8	1 0

×２

この「２」という数字は、「ｙ」を「ｘ」で割れば出てくることは分かるかな？

①ｘ＝１、ｙ＝２のところに注目しよう。

　ｙ÷ｘ
＝２÷１
＝２

②ｘ＝２、ｙ＝４のところに注目しよう

　ｙ÷ｘ
＝４÷２
＝２

①のときも②のときも比例定数はｙ÷ｘで求められているね。

「ｘ」に、ある数をかけた結果が「ｙ」なんだから、「ある数」を求めたいのであれば、「ｙ」を「ｘ」で割ればいいよね。

だから、ｙ÷ｘで「ある数＝比例定数」が求まるんだね。

では問題に挑戦してみよう。

（問）ｙはｘに比例しており、ｘ＝３のとき、ｙ＝９になる。
比例定数を求めよ。

比例の比例定数はｙ÷ｘで求まるから、

比例定数ａ＝９÷３＝３になるね。

「比例定数」なんて難しい言葉に感じるけれど、実際に学習してみるとそんなに難しいことではないね。
だけれどここから先、１年生では「反比例」、２年生は「１次関数」、３年生では「二乗に比例する関数」というのをやるので、ごっちゃになっちゃう人が多いんだ。

なので、ここでしっかりと押さえておこうね。

反比例とは

反比例も小学校で勉強したと思うよ。
反比例というのは、「一方が２倍・３倍になると、もう一方は１２倍・１３倍になる関係のこと」だったよね。

身の回りの反比例の例を紹介するね。

身の回りの反比例の例
「分ける人数」と「１人分の個数」

みかんが６個あったとするよ。１人で分けたら、１人分の個数は６個になるよね。いわゆる独り占めってやつだね。

２人で分けたら、１人分の個数は３個

３人で分けたら、１人分の個数は２個

６人で分けたら、１人分の個数は１個

表にまとめてみよう。４人と５人の時は切りよく分けられないので、空欄にしたよ。

分ける人数（人）	1	2	3	4	5	6
1人の個数（個）	6	3	2			1

$\times 2$　$\times 3$

分ける人数（人）	1	2	3	4	5	6
1人の個数（個）	6	3	2			1

$\times \frac{1}{2}$　$\times \frac{1}{3}$

「分ける人数」と「１人分の個数」は反比例の関係であることがよくわかるね。

では、中学生らしく「文字」を使って考えてみよう。

「分ける人数」をｘ、「１人分の個数」をｙとすると次のような表ができるよ。

x（人）	1	2	3	4	5	6
y（個）	6	3	2			1

x × y ＝ 6 になっている

今度は、上の段（ｘ）と下の段（ｙ）をかけたら「６」になっているね。

x × y = 6を、移項を使って「yを求めるための式」に変えてみよう。

y = 6 ÷ x

もう少し整理して

$y = \frac{6}{x}$
という式になるよ。

比例の式の形「$y = \frac{a}{x}$」

さっきの$y = \frac{6}{x}$がまさに反比例の式の形なんだ。

反比例の式の形は$y = \frac{a}{x}$と表されるよ。

比例の式と同じで、この「a」にはその式によって色々な数字が入るよ。

実際に問題に挑戦してみよう。

（問）次の中で、yがxに反比例しているものを選びなさい。

ア：$y = 2x$
イ：$y = \frac{3}{x}$
ウ：$y = 2x + 3$
エ：$y = 2x^2$

答えは「イ」。

「イ」だけが$y = \frac{a}{x}$の形になっているので反比例の式になっているよ。

反比例の比例定数

これがちょっと紛らわしいところなんだけど、

反比例でも「比例定数」っていうんだ。反比例の比例定数は、反比例の式ｙ＝ａｘの「ａ」のことをいうよ。

余裕があったら読んでみよう！

どうして反比例なのに「比例定数」っていうの？

ｙ＝ａｘの式を、よーく見てみよう。
これって、実はｙ＝a×｜ｘと書くこともできるよね。

これって、比例の式「ｙ＝ａｘ」が「ｙはｘに比例している」と言うのに対して、「ｙ＝a×｜ｘ」は「ｙは｜ｘに比例している」と言うことができるという事なんだ。

たとえるなら、
「私は、ピーマンの入った料理が好き」＝「ピーマンが好き」
という状態が「比例」だったとしたら、

「私は、ピーマンの入った料理が嫌い」＝「ピーマンが嫌い」
という状態が「反比例」だとするよ。

でも反比例の「ピーマンが嫌い」という状態を説明するのに、
「私は、ピーマンの入っていない料理が好き」＝「ピーマンが嫌い」
と言い換えることができるよね。

この感覚とおなじ。

「ｙはｘに比例している」の反対である「ｙはｘに反比例している」は、「ｙは｜ｘに比例している」と言い換えることができるということ。

なので、反比例の状態も「比例」のひとつと考えて、aのことを「比例定数」と呼ぶ、と考えることができるよ。

では、実際に問題を解いてみよう。

（問）反比例の式で比例定数をそれぞれ答えなさい。

ア：y＝$\frac{2}{x}$

イ：y＝$-\frac{3}{x}$

ウ：y＝$\frac{1}{x}$

答えを確認しよう。

反比例の比例定数はy＝$\frac{a}{x}$の「a」だから分子にある数を見たらいいよ。

ア：2
イ：－3
ウ：1

反比例の比例定数の求め方

教科書には「yがxに反比例するとき、x×yで反比例の比例定数が求まる」と書かれているよ。

反比例の比例定数の求め方はx×yで計算すればいいんだけど、なんでそうなるかを考えてみよう。

「みかんを分ける例」の表を確認すると、xとyをかけたら比例定数である「6」になっているのがわかるね。

x（人）	1	2	3	4	5	6
	×	×	×			×
y（個）	6	3	2			1

x×y＝6になっている

このように、ｘとｙで反比例の比例定数が求まるよ。

では、問題を解いてみよう。

（問）ｙはｘに反比例するとき、ｘ＝３のとき、ｙ＝９になる。比例定数を求めよ。

反比例の比例定数はｘとｙをかけたものだったから、

比例定数ａ＝３×９＝２７になるね。

まとめ

比例や反比例とは、ｘとｙがどういう関係なのか。比例定数とは何で、どうやって求められるのか。

比例・反比例はごっちゃになってしまいがちだから下にまとめたよ。

比例と反比例

・比例の式は「ｙ＝ａｘ」
　比例定数「ａ」は「ｙ÷ｘ」で求めることができる
・反比例の式は「ｙ＝ａ/ｘ」
　比例定数「ａ」は「ｘ×ｙ」で求めることができる

自然数に0が含まれるかどうか迷ったら

「象やキリンのイラストのカード」だけを使って、「象が0匹」という状態を説明できるかどうか考えよう！

「説明できない」ということは、「自然数」ではないということ！