平方根の考えを使って「二次方程式を効率よく解く方法」を解説

$ax^2+c=0$の形をした２次方程式の解き方

二次方程式を解くっていうのは「解」を求めることだと説明したね。

二次方程式を解くとか、「解」を求めるというのは、「$3x^2-48=0$」のような二次方程式の「x」に、どんな数字を入れたら式が成り立つかを考えることだったね。

「いくつが入るかな？？」とひとつひとつ当てはめていって考えてもいいけど、解き方を知っていればすぐに解を求めることができるよ。

ここでは、$3x^2-48=0$のような$ax^2+c=0$の形をした二次方程式の効率の良い解き方を紹介するね。

じつは、「$ax^2+c=0$」の形をした二次方程式は「平方根の考え」を使って簡単に解くことができるんだよ。

例えば、次のような２次方程式を解いていこう。

$3x^2-48=0$

$3x^2-48=0$の解き方

①数字の項「-48」を右辺に移項する

$3x^2-48=0$

$3x^2=48$

②x^2の係数「3」で両辺をわる

$3x^2=48$

$3x^2\div3=48\div3$

$x^2=16$

③x^2=〇の形になっているので、xの値を求める。
$x^2=16$
2乗して16になる数は
x=-4、x=4

$ax^2+c=0$の形をした二次方程式の練習問題

(1)$x^2-16=0$を解きなさい。

①数字の項「-16」を右辺に移項する
$x^2-16=0$
$x^2=16$

②x^2の係数で割る
→今回、x^2の係数は「1」だから、割っても数字は変わらない。

③x^2=〇の形になっているので、xの値を求める。
$x^2=16$
2乗して16になる数は
x=-4、x=4

(2)$x^2-7=0$を解きなさい。

①数字の項「-7」を右辺に移項する
$x^2-7=0$
$x^2=7$

②x^2の係数で割る
→今回、x^2の係数は「1」だから、割っても数字は変わらない。

③x^2=〇の形になっているので、xの値を求める。
$x^2=7$
2乗して16になる数は整数では存在しないね。そういうときは平方根の記号「ルート」を使うんだったね。
$x=-\sqrt{7}$　、$x=\sqrt{7}$

(3)$3x^2-10=0$を解きなさい。

①数字の項「-10」を右辺に移項する

$3x^2-10=0$

$3x^2=10$

②x^2の係数「3」で両辺をわる

$3x^2=10$

$3x^2\div3=10\div3$

$x^2=\frac{10}{3}$

③x^2=〇の形になっているので、xの値を求める。

$x^2=\frac{10}{3}$

2乗して$\frac{10}{3}$になる数は

$x=-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\sqrt{\ }$、$x=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

ただ、分母にルートがきてはいけなかったから
有理化しよう。

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$は分母と分子に$\sqrt{3}$をかけて

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{30}}{3}$

$ax^2+c=0$の形をした二次方程式は、x^2=〇の形に変形出来たら解を求めることができるね。

$(x+a)^2=b$の形をした二次方程式の解き方

$(x+a)^2=b$の形をした二次方程式も、さっきと同じように平方根の考えを使って簡単に解くことができるんだよ。

例えば、次のような二次方程式を解いていこう。

$(x+3)^2=16$

ぱっと見、右辺の$(x+3)^2$を展開しちゃいそうだよね。
ただ、展開すると計算がすごーく大変になるんだ。

①$(x+3)^2=16$の「x+3」を「A」とおいて解を求める

$A^2=16$
Aは2乗して16になる数だから、
・A=-4
・A=4
が解になるよね。

②「A」を「x+3」にもどす

「A」って「x+3」のことだったから
「A」を「x+3」にもどそう。
・x+3=-4
・x+3=4

③xを求める

x+3=-4 の場合
x =-4-3
x =-7
x+3=4　の場合
x =4-3
x =1
$(x+3)^2=16$の解は
x=-7、1
であることが求められたね。

二次方程式の解の確かめ

二次方程式の解が求まったら、本当にあっているか不安だよね。
そんなときは解の確かめを行おう。

さっき解いた
$(x+3)^2=16$
の解は$x=-7$と$x=1$だったよね。

$x=-7$と$x=1$を
$(x+3)^2=16$に代入して式が成り立つかを確認しよう。

もし$x=-7$だったら
(左辺)は次のようになるよね。

$(x+3)^2$
$=(-7+3)^2$
$=(-4)^2$
$=16$
$=$(右辺)

(左辺)と(右辺)が等しくなるから$x=-7$を代入して式が成り立つことがわかったね。

もし$x=1$だったら
(左辺)は次のようになるよね。

$(x+3)^2$
$=(1+3)^2$
$=4^2$
$=16$
$=$(右辺)

(左辺)と(右辺)が等しくなるから$x=1$を代入して式が成り立つことがわかったね。

$x=-7$のときも$x=1$のときも成り立ったから、
$(x+3)^2=16$の解は
$x=-7$、1だと自信をもって言えるね。

二次方程式の解の確かめ

求まった解を、もとの方程式に代入して式が成り立つか確認すればよい。

$(x+a)^2=b$の形をした二次方程式の練習問題

$(x+3)^2=5$を解きなさい。

①$(x+3)^2=5$の「x+3」を「A」とおいて解を求める

$A^2=5$

Aは2乗して5になる数だから、

・$A=-\sqrt{5}$

・$A=\sqrt{5}$

が解になるよね。

②「A」を「x+3」にもどす

「A」って「x+3」のことだったから

「A」を「x+3」にもどそう。

・$x+3=-\sqrt{5}$

・$x+3=5\ -\ -\sqrt{\ }$

③xを求める

$x+3=-\sqrt{5}$ の場合

$x=-\sqrt{5}-3$ ←これ以上計算できないよ。

$x+3=\sqrt{5}$　の場合

$x=\sqrt{5}-3$　←これ以上計算できないよ。

$(x+3)^2=5$の解は

$x=-\sqrt{5}-3$、$\sqrt{5}-3$

であることが求められたね。

$x^2+ax+b=0$の二次方程式の解き方

$x^2+ax+b=0$みたいな形の二次方程式をどのようにして解くのかを説明するね。

$x^2+ax+b=0$を$(x+〇)^2=△$みたいな形にできたら、さっきの解き方で解を求められるよね。

このようにして解く方法を「平方完成」って呼ぶよ。

$(x+〇)^2=△$の形に変形する（平方完成）

（問）$x^2+8x+7=0$の解を求めなさい。

$x^2+8x+7=0$を$(x+〇)^2=△$のような形にしよう。

まず、左辺の数字の項を右辺に移項しよう。

$x^2+8x+7=0$

$x^2+8x=-7$

ここまでは大丈夫だよね。

$x^2+8x=-7$を$(x+〇)^2=△$のような形にするために

両辺にある数を足すんだ！

ある数とは「16」

なんでわからないかもしれないけど、両辺に「16」を足してみよう。

$x^2+8x=-7$
$x^2+8x+16=-7+16$
$x^2+8x+16=9$

ここで、$x^2+8x+16$ って$(x+○)^2$の形にできるんだけど、○に当てはまる数はわかるかな？

答えは、$x^2+8x+16$ って$(x+4)^2$を展開したもの
だからさっきの式は次のようになるよ。

$x^2+8x+16=9$
$(x+4)^2\quad=9$
$(x+○)^2=△$のような形にできてしまえば、ここからはさっきと同じように解を求められるね。

①$(x+4)^2=9$の「x+4」を「A」とおいて解を求める
$A^2=9$
Aは2乗して9になる数だから、
・A=-3
・A=3
が解になるよね。

②「A」を「x+4」にもどす
「A」って「x+4」のことだったから
「A」を「x+4」にもどそう。
・x+4=-3
・x+4=3

③xを求める
x+4=-3 の場合
$x=-3-4$
$x=-7$
x+4=3　の場合
$x=3-4$
$x=-1$

$(x+4)^2=9$の解は
$x=-7$、-1
であることが求められたね。

$x^2+ax+b=0$の二次方程式の解き方のポイント

$x^2+ax+b=0$の２次方程式を$(x+〇)^2=△$の形にできてしまえば、あとは簡単に解が求められるよね。
だから、$(x+〇)^2=△$の形にすることが重要なんだ。
$(x+〇)^2=△$の形にするポイントは次の通りだよ。

$(x+〇)^2=△$の形にするポイント

$x^2+ax+b=0$の両辺に**「aを2で割った数の２乗」**を足すこと。

実際にいくつを足したらいいかを考えてみよう。

$x^2+8x+7=0$の両辺に足す数

$x^2+8x+7=0$
だったら、
「+7」を移項して
$x^2+8x=-7$
になるよね。

aを2で割った数の２乗を考えよう
・$x^2+8x=-7$の　aは「8」
・aを2で割った数　$8÷2=4$
・aを2で割った数の２乗　$4^2=16$
だから、両辺に16を足せばいいんだよ。
両辺に「16」を足すと
$x^2+8x+16=-7+16$
$x^2+8x+16=9$
になるよね。

ここで$x^2+8x+16$は$(x+4)^2$を展開した式だから
$x^2+8x+16=9$
$(x+4)^2=9$
と$(x+○)^2=△$の形にできたね。

$x^2+4x+3=0$の両辺に足す数

$x^2+4x+3=0$
だったら、
「+3」を移項して
$x^2+4x=-3$
になるよね。

aを2で割った数の２乗を考えよう
・$x^2+4x=-3$の　aは「4」
・aを2で割った数　$4÷2=2$
・aを2で割った数の２乗　$2^2=4$
だから、両辺に4を足せばいいんだよ。
両辺に「**4**」を足すと
$x^2+4x+\mathbf{4}=-3+\mathbf{4}$
$x^2+4x+4=1$
になるよね。
ここでx^2+4x+4は$(x+2)^2$を展開した式だから
$x^2+4x+4=1$
$(x+2)^2=1$
と$(x+○)^2=△$の形にできたね。

「平方根を利用した二次方程式の解き方」まとめ

・$ax^2+c=0$の形をした二次方程式を平方根の考え方を使って解く方法
　①移項して、$x^2=$〇の形にする
　②平方根の考えを使ってを$x^2=$〇の形からｘの値を求める

・$x^2=$〇の形で、2乗して〇になる数は整数が存在しない場合は、平方根の記号「ルート」を使う

・$(x+a)^2=b$の形をした二次方程式は、「x+a」を「A」とおいて解を求める

・$(x+〇)^2=△$の形にするポイント
$x^2+ax+b=0$の両辺に「aを2で割った数の２乗」を足す