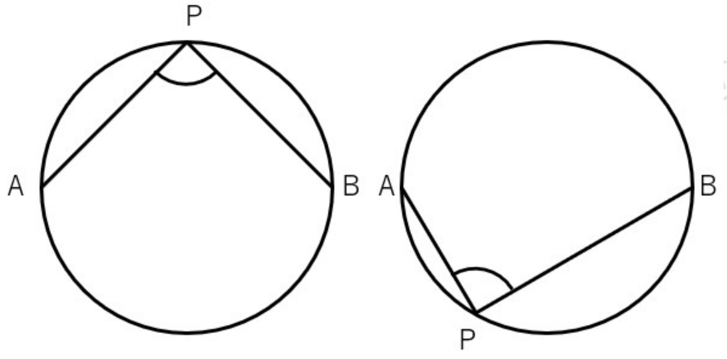
円周角とは？「円周角の定理」を例題を使ってわかりやすく解説

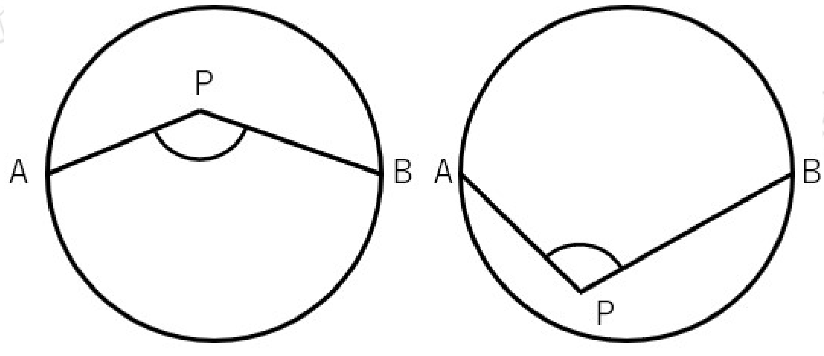
円周角とは

円周角っていうのは、円周上にできる角度のことだよ。



上の図で∠APBのことを$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角っていうんだよ。
円周角は円周の上にできる角ってことをまずは覚えておこう。

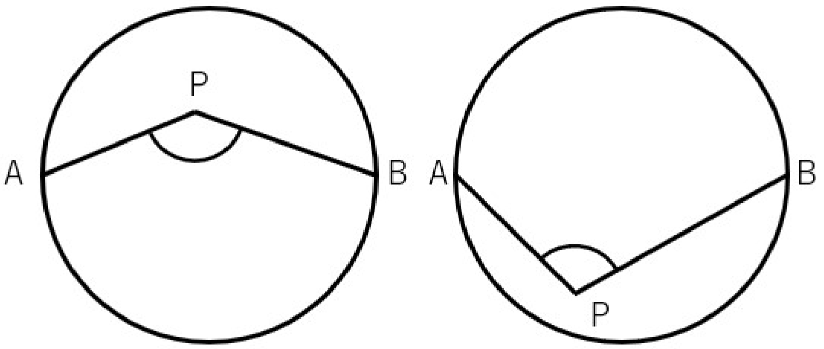
これは「円周角っていえる？」



これは円周の上に角ができていないから円周角とは言わないよ。

じゃあ、Pの位置が円の中心Oに来たら円周角って言えるかな？

これは「円周角っていえる？」



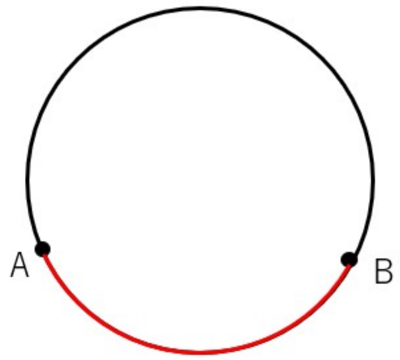
これは中心に角ができているよね。このときの∠AOBのことを中心角って呼ぶよ。

1年生の時に勉強したと思うけど、3年生でも大事になるからね。

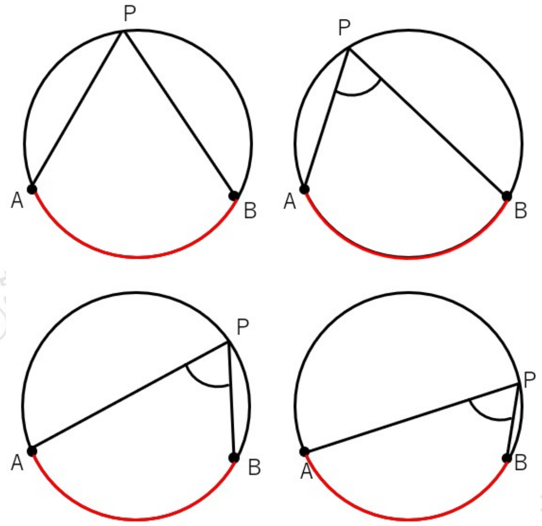
1つの弧に対する円周角の大きさ

円周角とは何かがわかったところで、ここからが本題だよ。
円周角には大切な性質があるんだ。

下の図のように、円周上に点Aと点Bを取ろう。



$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角をたくさん書いてみると「ある性質」が見えてこないかな？



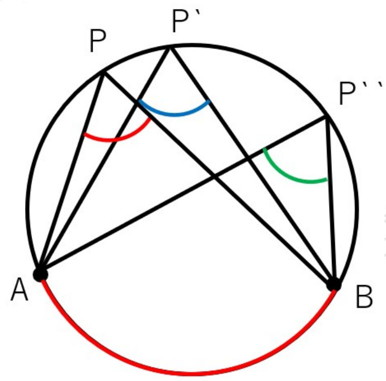
$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角∠APBの大きさがすべて一定（同じ）になっているよね。

まとめると円周角には次のような性質があるんだ。

円周角の定理①

1つの弧に対する円周角の大きさは一定

∠APB＝∠AP’B＝∠AP‘‘B



円周角の性質にはもう一つ大事なものがあるから紹介するね。

円周角とその弧に対する中心角の関係

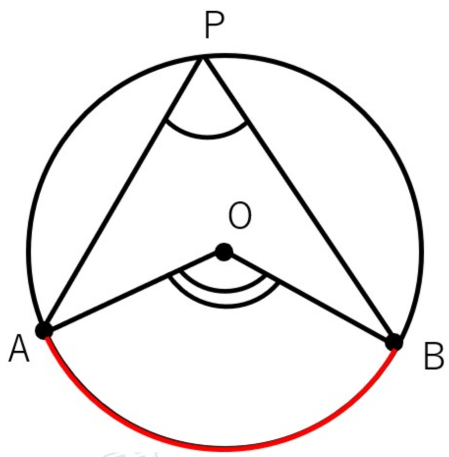
2つ目の円周角の性質は「円周角と中心角の関係」だよ。

結論は次の通り

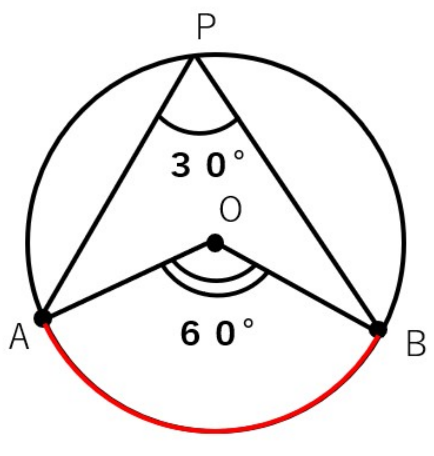
円周角の定理②

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分

$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$



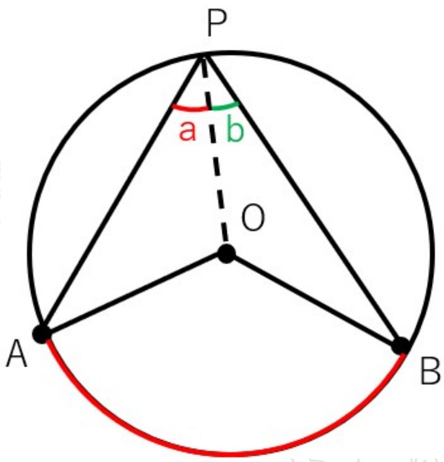
例えば、∠AOBが60°だったら∠APBは30°になるってことだよ。



なんで中心角の半分が円周角になるのかを考えていこう。

中心角の半分が円周角になる理由

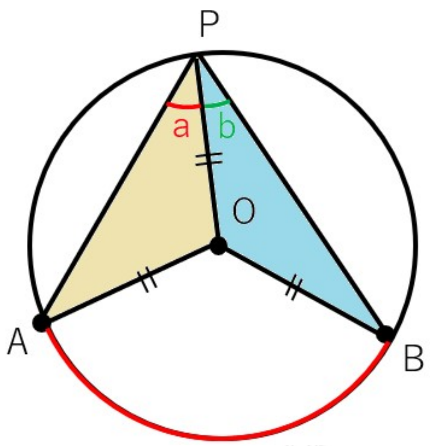
POを結んで、「$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角∠APB」を2つに分けよう。



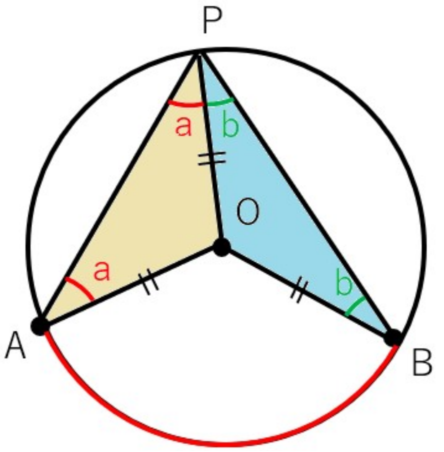
ここで次の長さは円の半径だから等しくなるよね。

OA=OB=OP

そうすると、色の付けた△OAPと△OBPは二等辺三角形ってことになるね。



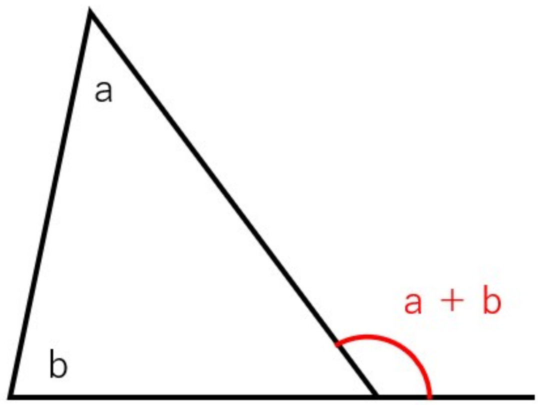
二等辺三角形の底角は等しくなるから、次のようになるよ。



最後に三角形の外角の性質を使おう。

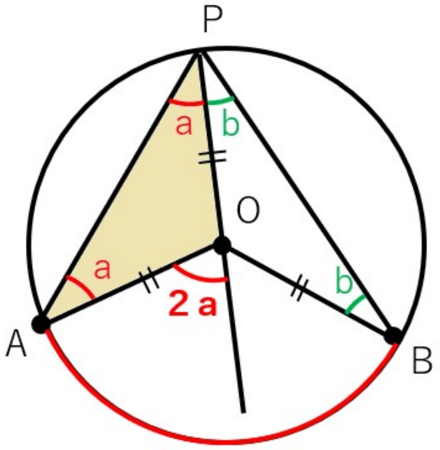
三角形の外角の性質

三角形の外角は、隣り合わない2つの内角をたしたものと等しい



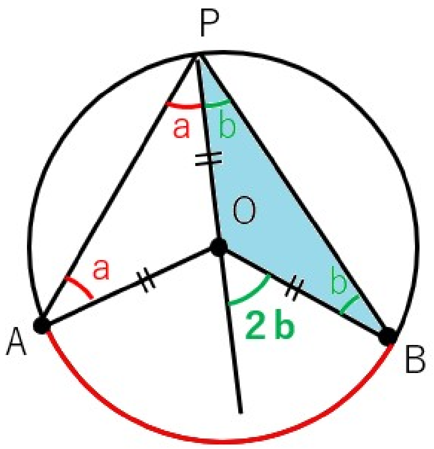
△AOPに注目しよう。

OPを延長して、三角形の外角の性質を使うと、
中心角の左側はa+a=2aになるよ。

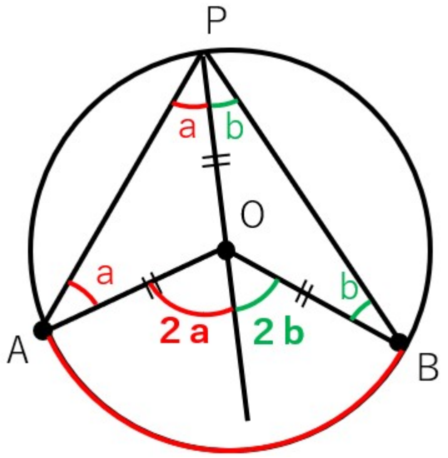


△BOPに注目しよう。

三角形の外角の性質を使うと、
中心角の左側はb+b=2bになるよ。



ということは、中心角∠AOBの大きさは2a+2bと表すことができるんだ。



最後に$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角と円周角の大きさを比べてみよう。

・中心角∠AOB=2a+2b

・円周角∠APB=a+b

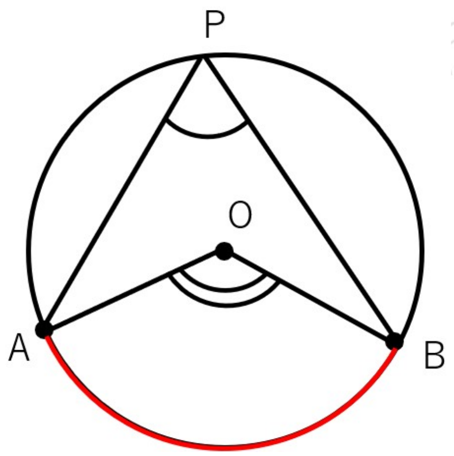
→中心角の半分が円周角になることが説明できたね。

だから次の性質が成り立つってことだよ。

円周角の定理②

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分

∠APB=$\frac{1}{2}$∠AOB

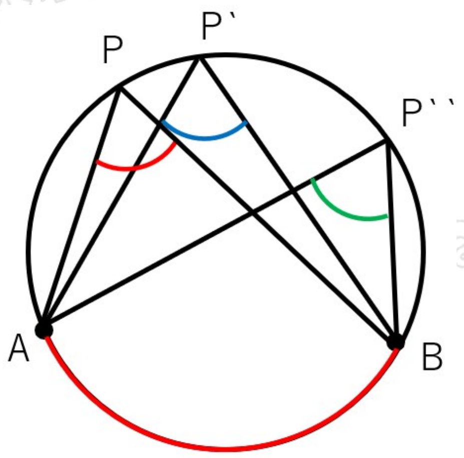


円周角の定理

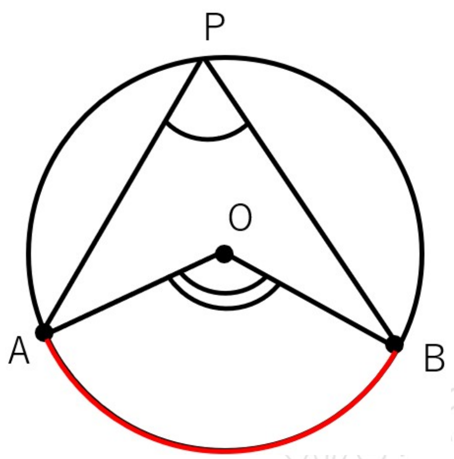
円周角の定理は次の通りだよ。問題を解くときに必ず必要な知識だからしっかりマスターしよう。

円周角の定理

・1つの弧に対する円周角の大きさは一定
∠APB＝∠AP’B＝∠AP‘‘B



・1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

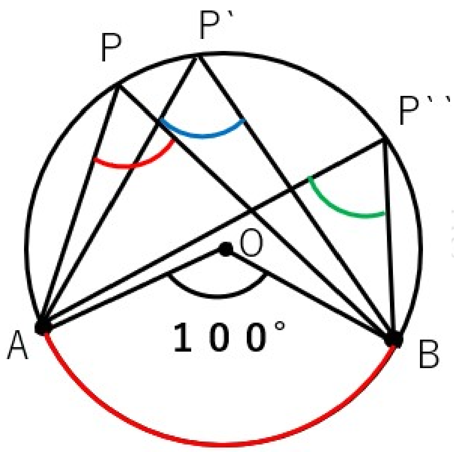


最初に紹介した「1つの弧に対する円周角の大きさは一定」という性質がなぜ成り立つかは説明していなかったけれど、
「1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分」の性質を使えば説明できちゃうよ。

1つの弧に対する円周角の大きさが一定になる理由

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分だったから、

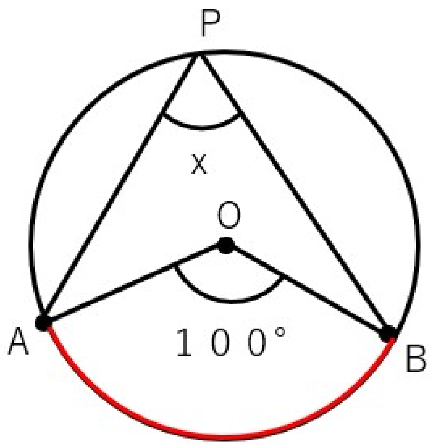
もし、$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角が100° だったとしよう。
ことき、$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角はすべて50° になるよね。
∠APB＝∠AP'B＝∠AP"B＝50°



だから「1つの弧に対する円周角の大きさは一定」になるんだよ。

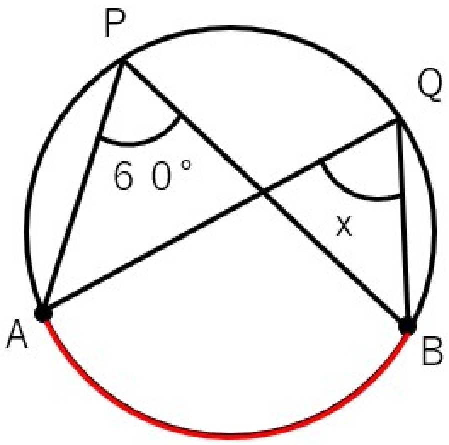
円周角の問題

円周角の定理を使って問題を解いていこう。

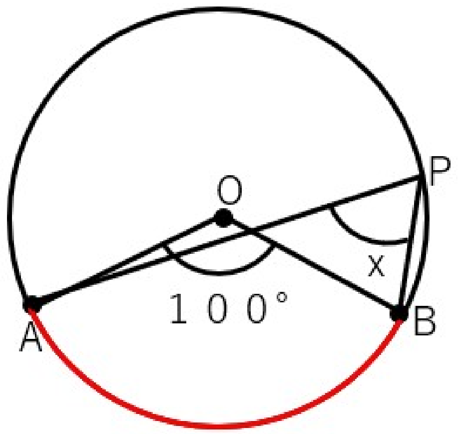


「1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧の中心角の大きさの半分」だったよね。

この問題では中心角が100°だから、円周角xは100÷2=50°と求まるね。



∠Pも∠Qも$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角だから∠P=∠Qになるよね。
だから、x=60°と求められるよ。



「初めて見る図形だな」と感じるかもしれないけど、

∠AOBは$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角で、
求めたいxは$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角
なのがわかるかな？

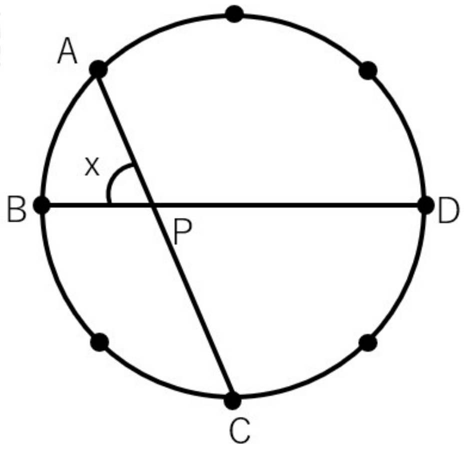
ということは、中心角100°の半分が円周角になるから、x=50°が答えだよ。

円周角の定理さえ知っていれば楽勝な問題だったね。ただ、次の問題は頭を使うと思うよ。

「中心を通らない」円周角の問題

「中心を通らない」場合の円周角の問題はどうやって解けばいいんだろう？と困ってしまうという意見が多かったので、ここで紹介するね。

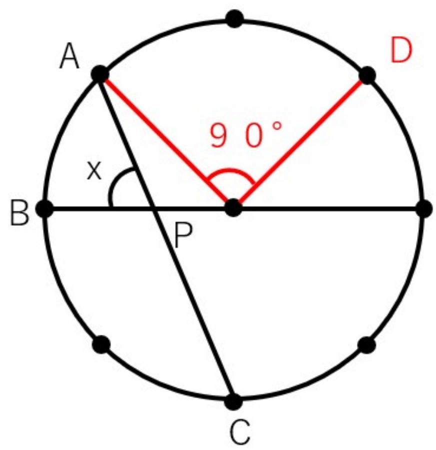
次の点は円周を8等分した点である。xの角度を求めなさい。



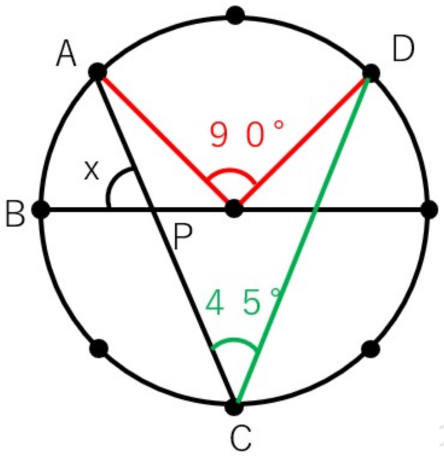
今までの問題と比べると中心も書いていないし、角度も書いていないから難しく感じるよね。
このまま眺めていても何も進まないから、中心Oをとって次のように赤線で結ぼう。

$\overset{\frown}{AB}$ は点2つ分だから、中心角は90° になるよね。

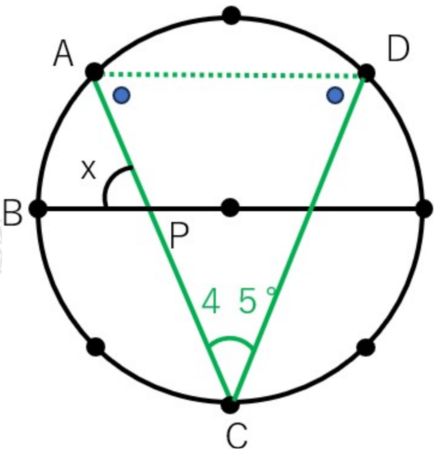
なぜなら
8つ分で360°
1つ分は360°÷8=45°
2つ分だから45°×2=90°



次にCとDを次のように緑線で結ぼう。
「1つの弧に対する円周角は中心角の半分」だったから、
∠C=90°　÷2=45°　と求まるね。



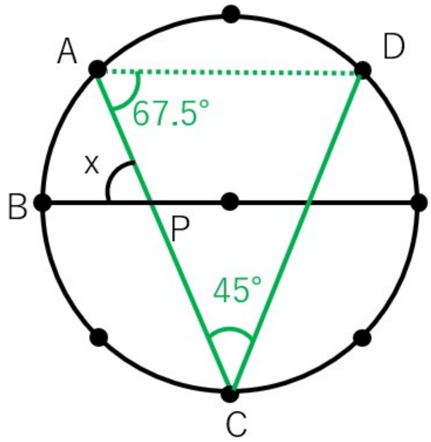
次にADを結ぶと、△ACDは二等辺三角形になっているよね。
二等辺三角形の底角は等しくなるから、
∠Aと∠Dの大きさは等しいよ。



△ACDの内角の和は180°　だから、∠Aの角度は

180°−45°=135°
135°÷2=67.5°　　←底角は等しいから÷2をしているよ。

と求められるね。



最後に平行線の錯角は等しいから、x=67.5゜と求まったね。