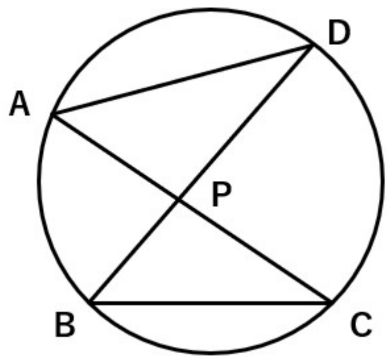
円周角の定理を使った相似の証明（円と交わる直線でできる図形）

円周角の定理は、どんなことに利用できるだろう？
ここでは、円と交わる直線でできる図形が相似であることを、円周角の定理を使って証明するよ。

また、相似であることを利用して、図形の辺の長さを答える問題の解き方も紹介するよ。

円の内部に点Pを取った場合

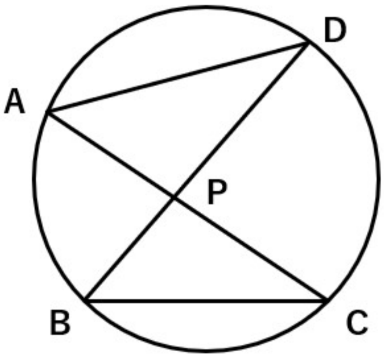
円の内部に、点Pを取って、Pを通る２つの直線を引いたとするよ。
そして、その直線と円の交点どうしを結んでみるよ。



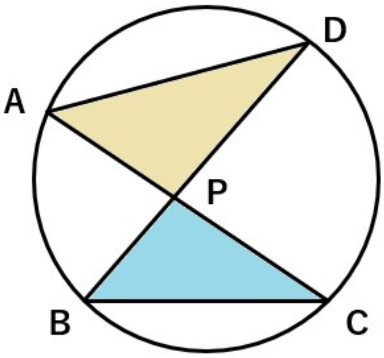
すると、このような２つの三角形が円の中にできるんだ。
実はこの２つの三角形は相似になるんだよ。

では、円周角の定理を使ってこの２つの三角形が相似であることを証明していくよ。

下の図で△APD∽△BPCになることを証明しなさい。



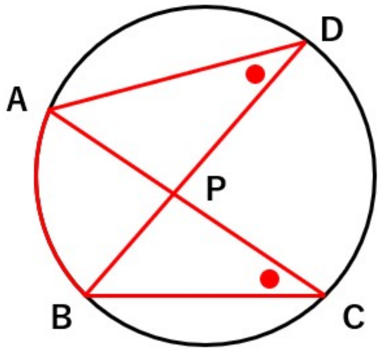
結論から先に言うと、相似条件は
２組の角がそれぞれ等しいになるよ。



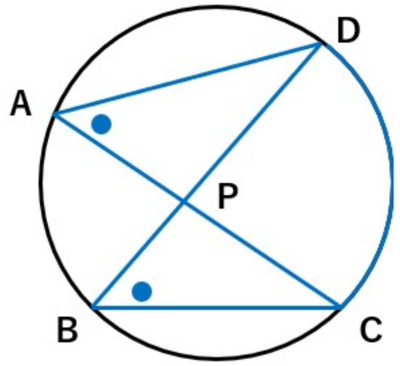
では、「２組の角」とはどこなのかを考えよう。

円周角の定理
「１つの弧に対する円周角の大きさは一定」という性質を使うと

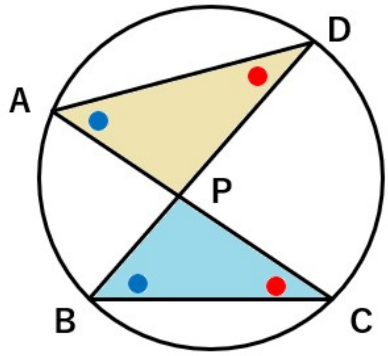
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠ADP＝∠BCP　　・・・①



$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから
∠DAP=∠CBP　・・・②

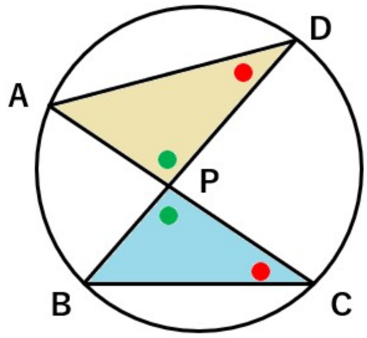


①②より、2組の角がそれぞれ等しいので
△ABP∽△BCP



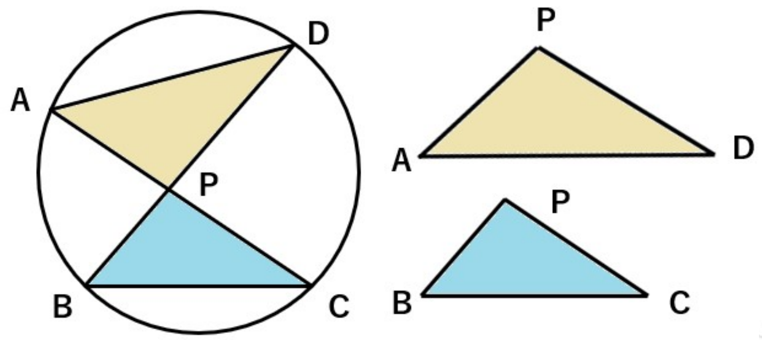
ここでは円周角の定理を2回使ったけれど、1回にすることもできるんだ。
なぜかというと、対頂角が等しいから、∠APD=∠BPCになるからね。

次の図のような「2組の角」とすることもできるよ。



相似の証明はこれで終わりなんだけど、相似であることからわかることは何か考えてみよう。

相似からわかること
2つの図形が相似であることからわかることは何だろう？



相似な図形の性質を思い出してみよう。

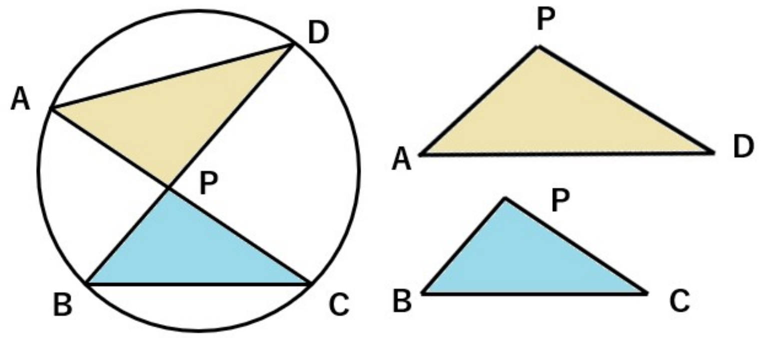
相似な図形の性質

相似な図形の対応する辺の長さの比はすべて等しい。
相似な図形の対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

この性質を使うと次の2つのことがわかるよ。

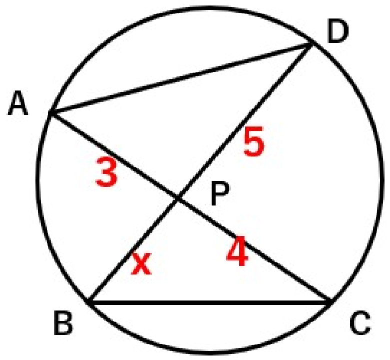
相似な図形の対応する辺の長さの比はすべて等しい。
→AP：BP＝AD：BC＝DP：CP

相似な図形の対応する角の大きさはそれぞれ等しい。
→∠APD＝∠BPC、∠A＝∠B、∠D＝∠C



相似であることから長さを求める問題

円と交わる直線でできる図形（今回は三角形）が相似であるということは、次のように図形の1辺の長さがわからない場合でも、相似な図形の性質を使って求めることができるね。



△ADP∽△BCPで、対応する辺の比は等しいから、
AP：BP＝DP：CP

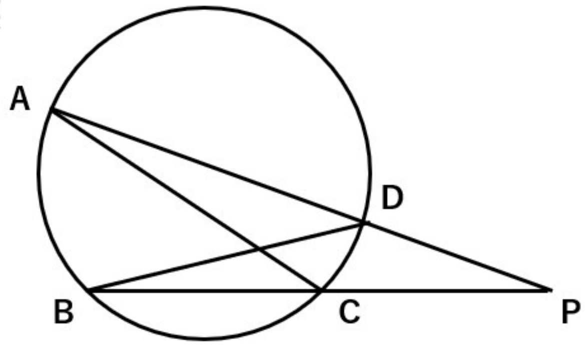
数字を代入して
3：x＝5：4

比例式を解いてxを求めよう。
3：x＝5：4
x×5＝3×4
5x＝12
$x=\frac{12}{5}$

円の外部に点Pを取った場合

おなじく点Pを取って、Pを通る2つの直線を引くんだけれど、今度は点Pが円の外部にある場合について考えていこう。

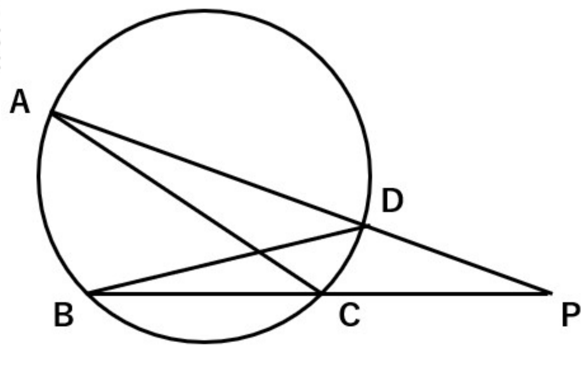
円の外部に点Pを取って、Pを通る2つの直線を引いたとするよ。
そして、その直線と円の交点どうしを結んでみるよ。



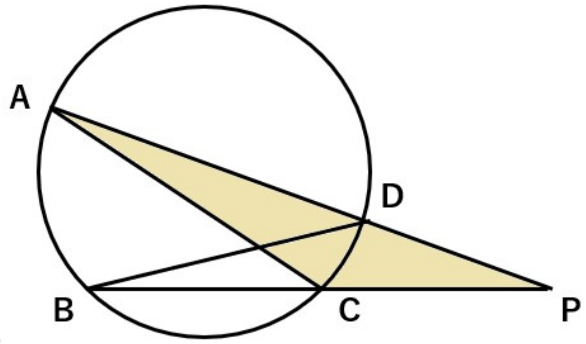
すると、このような2つの三角形が円の中にできるんだ。
この2つの三角形も相似になるんだよ。

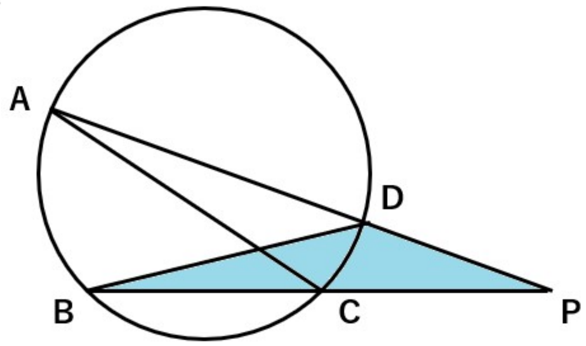
では、円周角の定理を使ってこの2つの三角形が相似であることを証明していくよ。

下の図で△ACP∽△BDPを証明しなさい。



結論から先に言うと、相似条件は
2組の角がそれぞれ等しいになるよ。



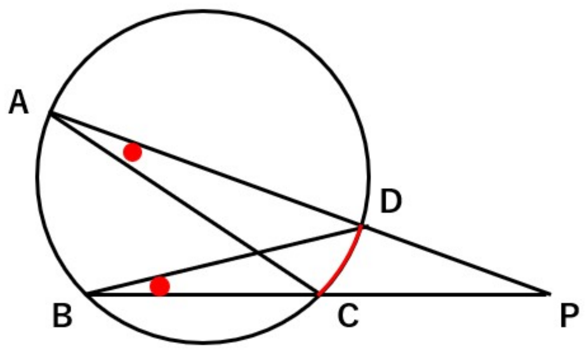


では、2組の角ってどこなのかを考えよう。

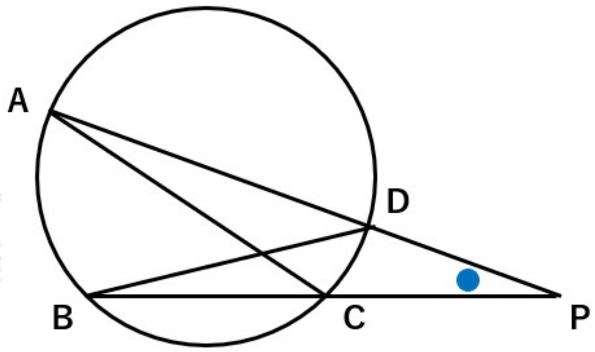
円周角の定理
「1つの弧に対する円周角の大きさは一定」という性質を使うと

$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから

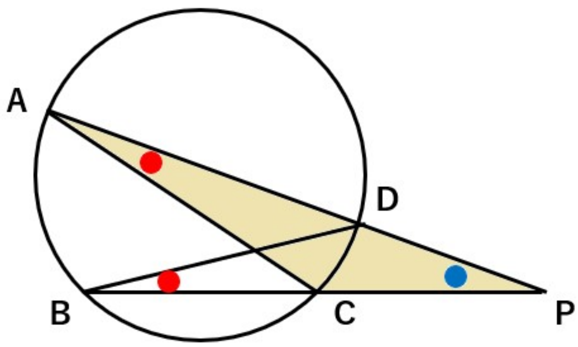
∠PAC=∠PBD　・・・①

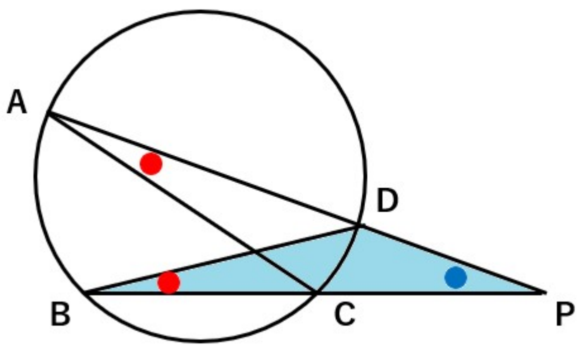


∠Pはどちらの三角形にもあるから、
∠Pは共通　・・・②



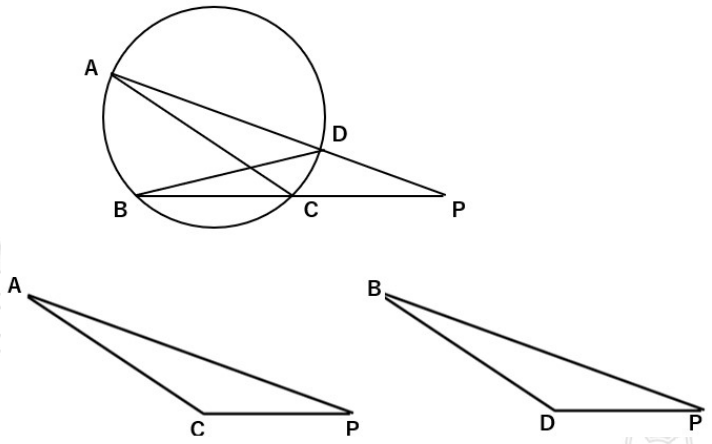
①②より、2組の角がそれぞれ等しいので
△ACP∽△BDP





相似の証明はこれで終わりなんだけれど、相似であることからわかることは何か考えてみよう。

相似からわかること
2つの図形が相似であることからわかることは何だろう？



相似な図形の性質を思い出してみよう。

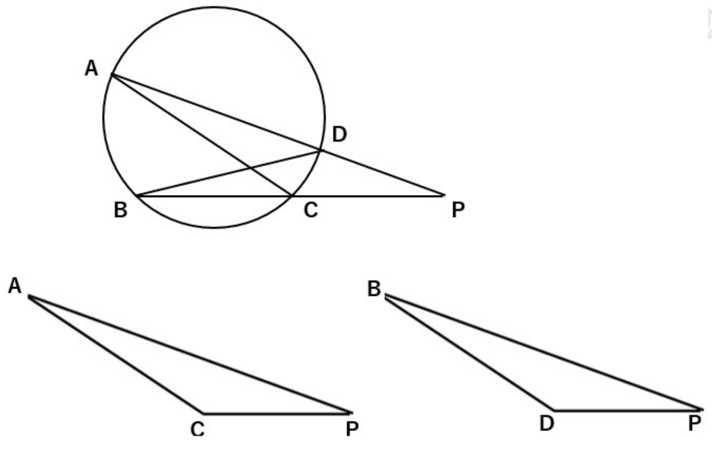
相似な図形の性質

相似な図形の対応する辺の長さの比はすべて等しい。
相似な図形の対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

この性質を使うと次の2つのことがわかるよ。

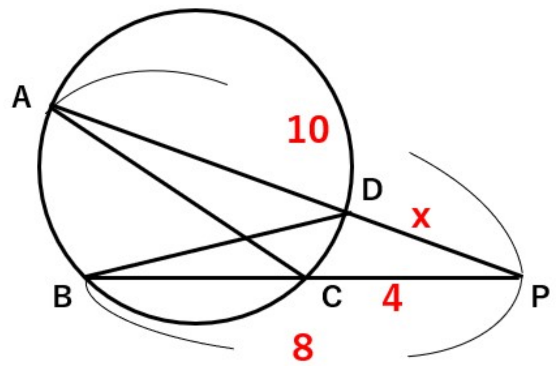
相似な図形の対応する辺の長さの比はすべて等しい。
→AC：BD＝CP：DP＝PA：PB

相似な図形の対応する角の大きさはそれぞれ等しい。
→∠A＝∠B、∠ACP＝∠BDP、∠APC＝∠BPD



相似であることから長さを求める問題

円と交わる直線でできる図形（今回は三角形）が相似であるということは、今回も図形の１辺の長さがわからない場合に、相似な図形の性質を使って求めることができるね。



△ACP∽△BDPで、対応する辺の比は等しいから、
→CP：DP＝PA：PB

数字を代入して
$4:x=10:8$

比例式を解いてxを求めよう。
$4:x=10:8$
$x\times10=4\times8$
$10x=32$
$x=\frac{16}{5}$

方べきの定理

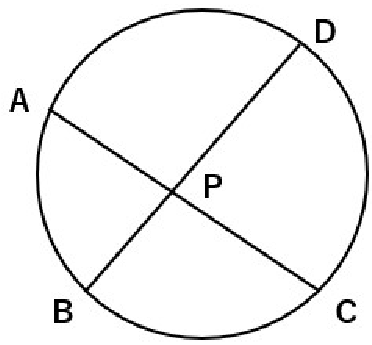
今回学習した内容は、高校生になって「方べきの定理」という名前で再登場するんだよ。

方べきの定理は少し前まで中学3年生で習う内容だったんだけど、今は高校1年生の内容になっているよ。

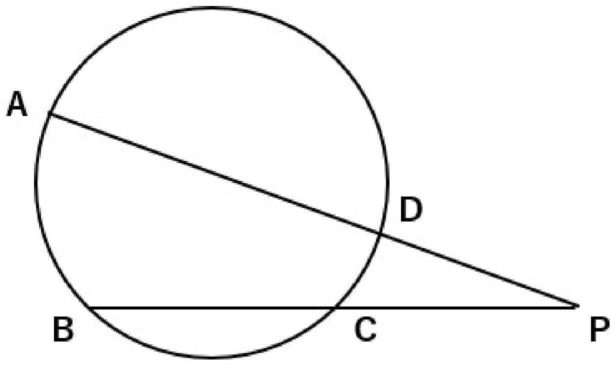
方べきの定理とは次の通り。

方べきの定理

①PA：PC＝PD：PB

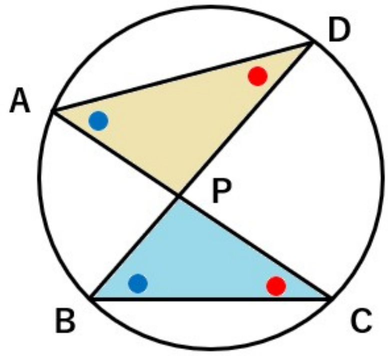


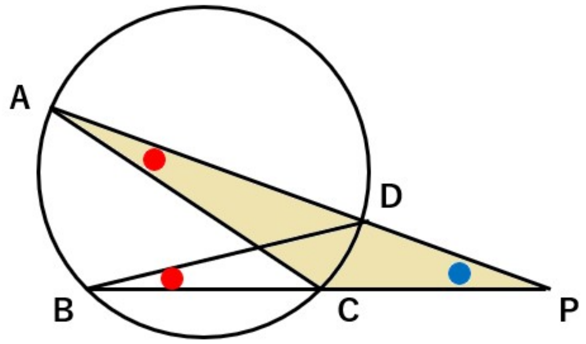
②PA：PD＝PB：PC

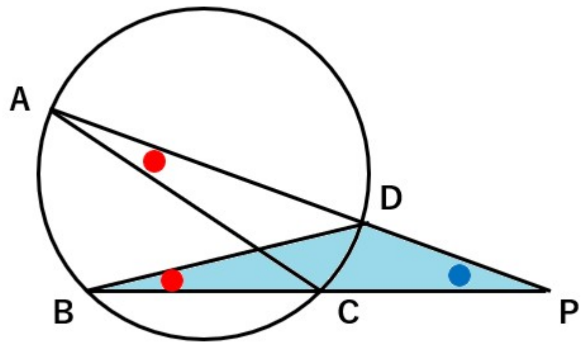


方べきの定理が成り立つことの証明だけれど、今回学習した「円と交わる直線でできる図形」が相似になることで説明できるよね。

例えば、①なら、ADとBCを結ぶと、△ADP∽△BCPになることがさっき分かったよね。







高校生で習う「方べきの定理」はなんとなく知っておくと便利かもしれないよ。