

「一次関数」とは？日常生活の例をもとに x と y の関係を式で表そう

スタートが0ではない「x と y の関係」を 式で表してみよう

「x と y の関係を式で表す」とは、「x」と「y」というある数があるときに、「x がいくつになる」と「y はいくつになる」というように、x と y それぞれが、もう片方の数によって変わるような関係だとするよ。

そういう関係の時、それを「式で表してみよう」ということだよ。

では、実際に「片方の数によってもう片方の数が変わるような関係」を例にみながら、考えてみよう。

例題

(1) 太郎くんは、毎月200円ずつ貯金をしています。貯金をしはじめてから x ヶ月後の貯金額を y 円として、x と y の関係式を表してみよう。

(2) 太郎くんが最初に1600円持っていて、毎月200円ずつ貯金をした場合、貯金をしはじめてから x ヶ月後の貯金額 y 円の関係はどうなりますか。x と y の関係式を表してみよう。

毎月200円ずつ貯金をする場合、貯金をした月数(何ヶ月貯金をしたのか)と、貯金できた額は関係があるよね。

それがどういう関係かを表す式を考えれば良いということだね。

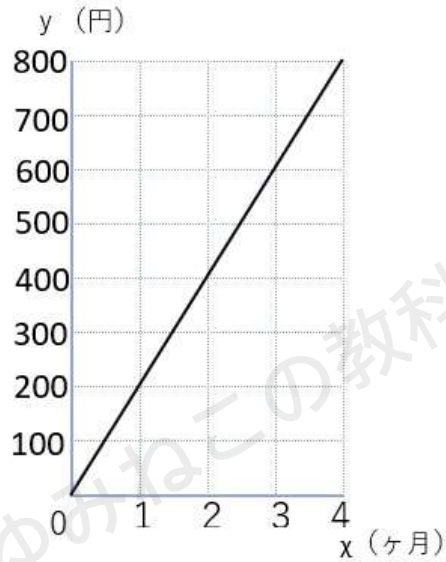
(1) まずは、月々にお金が増える様子を表にしてみよう。
上が「何ヶ月貯金をしたのか」、下が「いくら貯金できたのか」だね。

x ヶ月後	0 (スタート)	1	2	3	4
y 円	0	200	400	600	800



この表を見ると、小学生や中学1年生の時に習った「比例」だということに気づくかな？

グラフでも表してみるよ。



グラフは原点を通る直線になったね。
 やっぱり比例の関係だということがわかるね。
 あとは、このグラフを式に表すと

$$y=200x$$

となったね！
 これで、「 x と y の関係を式で表す」ことができたね。

比例の式の求め方(復習)

比例の式の求め方を忘れてしまった人はここで確認しておこう。
 比例の式は

$$y= ax$$

と表すことができたね。
 そして、 a には「比例定数」という名前がついていたね。
 そして、 y と x に値を代入して a を求める方法で式を求めることができるよ。



今回は、上の表の「 $x=1$ のとき、 $y=200$ 」を代入すると

$$a=200$$

になって、 $y=200x$ を求めることができるよ。

また、 $a=200$ については、

x が1増えると y が200ずつ増えている

という関係からも求めることができたね。

※ x の値が1増えるときに、対応する y の値がどのくらい増えたり減ったりしているかを表すものが比例定数だよ。

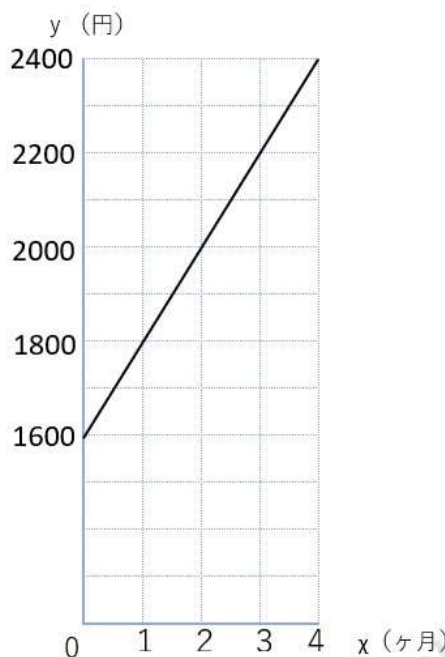
(2) 次の問題は、最初から1600円持っているところからスタートする問題だね。

(1)の問題と同じように、まずは表を書いて考えてみよう。

違うところは、「スタート」のところで、すでに y (貯金できた額)は1600(円)になっているところだよ。

x ヶ月後	0(スタート)	1	2	3	4
y 円	1600	1800	2000	2200	2400

次にこの表からグラフを描いてみよう。



(1)で描いたグラフと見比べてみると、スタートの位置が原点ではなくて、 y が1600のところから始まっているだけで、すごく似ていることに気が付くかな？

求める式も(1)と似ていて、スタートの位置の分($x=0$ の時の y の値。今回なら、1600だね。)を(1)の式に加えてあげればOKなんだ。

(1)の式は、 $y=200x$ だったね。
ここに、「1600」を加えてあげればいいんだよ。

というわけで、(2)の関係を表す式は

$$y=200x+1600$$

となるんだ。

どうして(1)の式に「1600」を加えてあげればいいだけなの？

今回、貯金をする月の数(x)と、毎月貯金する金額(200)は、(1)も(2)も同じだよ。

ということは、貯金した額(y)は、同じく貯金した月数(x)と毎月の貯金額(200)をかけたものになるから、やっぱり $y=200x$ で変わりがないんだ。

これが、(1)の式とおなじで良いと言った理由だよ。

ただ、ここに、スタートのときからある「1600」を足してあげなきゃいけないよね。

それが、(1)の式に、1600を足せば良いと言った理由だよ。

つまり、 x と y の関係はもともとは比例の関係なので、 $y=ax$ で良いんだけど、スタートの時の数値が「0」ではないので、その数分を足す必要があるんだね。

ただ、この「スタートのときの数値」を毎回こういうふうに言っていたら大変なので、アルファベット「 b 」であらわすよ。



このように、「 y と x は本当なら比例の関係なんだけれど、スタートが0ではなく b から始まるよ」という関係を、式では

$$y = ax + b$$

とあらわすんだ。

そして、この式の形で表される関係のことを、今回学習する「一次関数」と呼ぶんだよ。

1 次関数とは

「1次関数」なんてことばだけ見ると、なんだか難しそうだなあってなってしまうよね。

でも、安心してね。ことばの意味をくわしく説明するよ。

「関数」とは、「ある数と、ある数が関係しているよ」という意味だったよね。

今回で言えば、「貯金した月の数と、貯金できた金額」は関係があるよね。
これが「関数」。

では、「1次」は何かというと、中学数学では、数だけではなく「文字」が登場しているよね。
この「文字」が、「いくつかかけられているか」が「次数」なんだよ。

さっきの式をもう一度確認してみよう。

$$y = 200x + 1600$$

この式には、「 y 」と「 x 」という文字が登場しているね。
この文字たち、「それぞれいくつかかけられているかな？」

y は見えない「1」とかけられているよ。「 y 」がひとつだけかけられているね。

x は「200」とかけられているよ。「 x 」がひとつだけかけられているね。

なので、この式は「文字がひとつだけかけられている」式なんだ。



y と x 、それぞれひとつかけられているから、「2つかけられている」と思ってしまうかもしれないけれど、この「次数」は、「全部でいくつ」かではなくて、「最高でいくつ」で考えるんだよ。

y と x 、それぞれ「ひとつかけられている」ので、結局この式の中での最高は「ひとつ」なんだ。

かけられている数が最高「1」の、関係が数の式なので、「一次関数」と呼ぶというわけだね。

定数とは

一次関数についてはわかったかな？
ところで、今回の一次関数の式

$$y=200x+1600$$

だけれど、この「200」と「1600」は、ケースによってで数字が変わるよね。
たとえば、もし「毎月400円貯金する」だったら

$$y=400x+1600$$

になるし、
もし「スタートは2000円」だったら

$$y=200x+2000$$

になるよね。

どんな数が出るかは、ケースによって違うので、これを文字におきかえて式を表すんだ。

「 x の値が1増えるときに、対応する y の値がどのくらい増えたり減ったりしているかを表すもの」を「 a 」と表して、

「スタートの位置の分（ $x=0$ の時の y の値）」を「 b 」と表すんだ。



そうすると、式は

$$y = a x + b$$

となるよ。

a は比例と同じように x の値が1増えるときに、対応する y の値がどのくらい増えたり減ったりしているかを表す「比例定数」だね。

b は、比例にはなかったもので「定数」と呼ばれるよ。

問題によっては、プラスの時もマイナスの時もあるんだ。

(もし、「借金がある状態から貯金をする」というケースだったら、「 b 」はマイナスになるよね。)

余裕があったら読もう!

「比例は一次関数の仲間だった!」

$y = a x + b$ の一次関数で、
 $b = 0$ の時にできる特別な式

$$y = a x$$

のことを中学1年生で習った比例っていうんだよ。

つまり比例は一次関数の仲間なんだ。

一次関数のグラフの形は、さっきも登場したように比例と同じように右上がりや右下がりの直線になるよ。

ただし、比例と違って「 b 」があるので、原点(0,0)を通らないことがポイントだよ。

もし原点を通るなら、それは「比例」になるということだね。

一次関数「 $y = a x + b$ 」とは?まとめ

- ・一次関数とは、「文字がひとつだけかけられている」「関数」の式のこと、 $y = 200 x + 1600$ のような式のことをいう。
- ・ x の値が1増えるときに、対応する y の値がどのくらい増えたり減ったりしているかを表すものを「比例定数」といい、「 a 」であらわす。
- ・ $x = 0$ の時の y の値を「定数」といい、「 b 」と表す
- ・ $y = a x$ の「比例」は、一次関数の仲間、 $b = 0$ の場合の式。



日常生活の中の一次関数を探そう

一次関数をもっとよく理解するために、身のまわりの出来事で一次関数で表すことができるものを探してみよう。

問題

次の中で一次関数の式で表されるものがどれか選びなさい。
また、全ての問題について y を x の式で表しなさい。

(ア) 25℃の水を温めるとき、1分間につき2℃ずつ水の温度が上がります。 x 分後の水の温度を y ℃とするときの関係式

(イ) 1辺が x cmの正方形の周の長さ y cmの関係式

(ウ) 20個のリンゴを x 人で分けた時の1人あたりの個数 y 個の関係式

(エ) 1000円を持って、50円のお菓子を x 個買った時の残金 y 円の関係式

まずは、それぞれの式がどういったものになるか考えてみよう!
ただ、どうしてもすぐに求めることが難しいという場合には、次の手順で考えてみよう。

x と y の関係式を考える時の手順

- ① x と y の表を作る
- ② x と y のグラフを描く
- ③ ①と②を参考に式を考える

(ア)

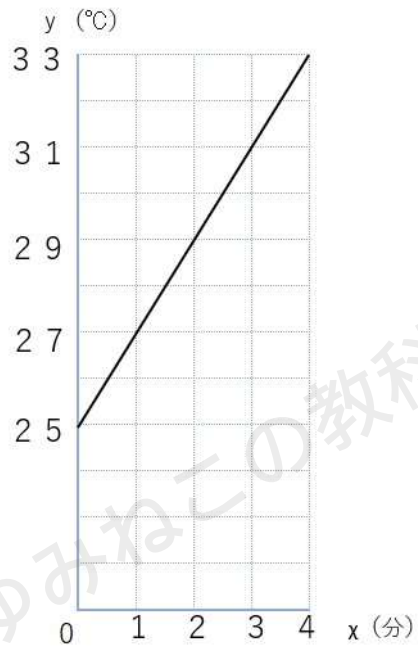
上の手順通りに考えてみよう。

① x と y の表を作る

温めた時間 x (分後)	0	1	2	3	4
水の温度 y (℃)	25	27	29	31	33



② グラフを描く



③ ①と②を参考に式を考える

表やグラフの形から、 $y = ax + b$ の形で表すことができそうだね。

x が1増えると、 y が2ずつ増えている $\Rightarrow a = 2$

x が0の時の y の値が2.5 $\Rightarrow b = 2.5$

以上のことから、

$$y = 2x + 2.5$$

と表すことができ、一次関数といえることもわかったね。



(イ)

① x と y の表を作る

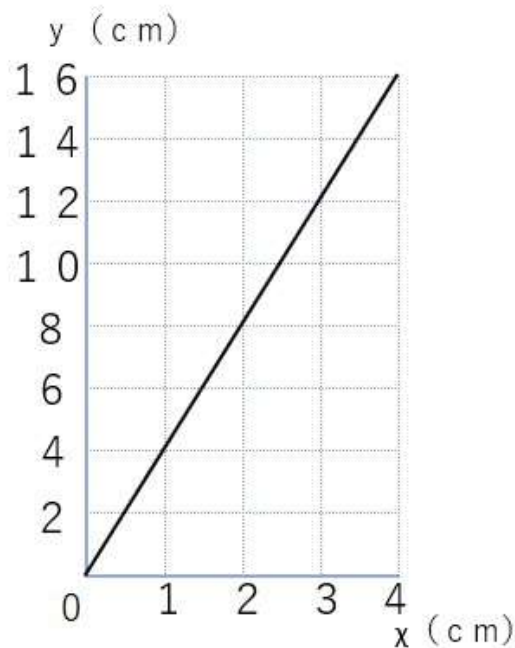
正方形の周の長さは、4つの辺を全て足した長さのことだよ。
正方形は4つの辺が全て同じ長さだから、

$$\text{周の長さ} = \text{1辺の長さ} \times 4$$

と計算して OK だよ。

正方形の1辺の長さ x (cm)	0	1	2	3	4
正方形の周の長さ y (cm)	0	4	8	12	16

② グラフを描く



③ ①と②を参考に式を考える

グラフを見てわかる通り、これは比例の $y = a x$ の形になることがわかるね！



x が1増えると、 y が4増えているから、 $a = 4$ になるので

$$y = 4x$$

と表すことができるね。

これは比例の式だけれども、比例も一次関数の仲間だから、(イ)も一次関数といえるよ。

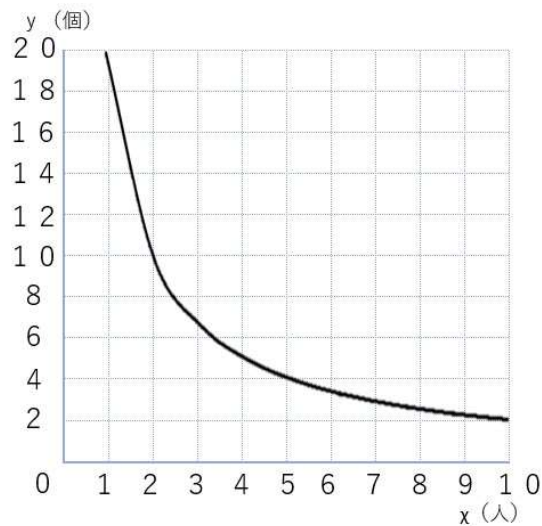
(ウ)

① x と y の表を作る

分けた人数 x (人)	1	2	4	5	10
1人あたりの個数 y (個)	20	10	5	4	2

x の3や6を飛ばしているのは、その人数だとうまく分けることができないからだよ。

② グラフを描く



③ ①と②を参考に式を考える

グラフの形から、反比例の式だということがわかるね。



反比例の式は

$$y = \frac{a}{x}$$

で表すことができたね。

また、反比例の a は

$$a = x \times y$$

で求めることができるよ。

※グラフの x と y をそれぞれ掛けてみると、全て 20 になっているよ。

以上のことから、今回求める式は

$$y = \frac{20}{x}$$

となり、一次関数ではないことがわかったね。

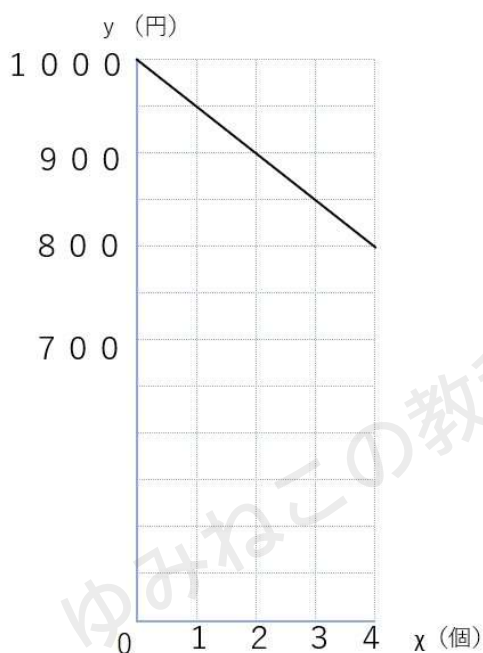
(エ)

① x と y の表を作る

お菓子の個数 x (個)	0	1	2	3	4
残金 y (円)	1000	950	900	850	800



② グラフを描く



③ ①と②を参考に式を考える

グラフの形から、 $y = ax + b$ の形で表すことができそうだね。

x が1増えると、 y が50ずつ減っている $\Rightarrow a = -50$

x が0の時の y の値が1000 $\Rightarrow b = 1000$

以上のことから、

$$y = -50x + 1000$$

と表すことができ、一次関数といえることもわかったね。

答え

一次関数の式で表されるもの (ア) (イ) (エ)



それぞれの式

(ア) $y = 2x + 25$

(イ) $y = 4x$

(ウ) $y = 20x$

(エ) $y = -50x + 1000$

まとめ

一次関数や比例、反比例については

- ① x と y の表を書く
- ② x と y のグラフを描く
- ③ 関係を式に表す

この手順で確認すると、見分けることができるよ。

繰り返し手順通りに確認を続けることで、文章を見ただけでどの式かわかるようになるから、コツコツ取り組んでいこう。

