

乗法公式を利用して 「いろいろな式の展開」をする方法を解説

乗法公式を利用していろいろな式を展開してみよう

乗法公式を使うと、多項式×多項式の展開がとても簡単に早くできるんだよね。

でも、乗法公式は4つの形があって、それぞれその形が多項式×多項式の式でないと使うことができないんだよね。

でも、あきらめるのはまだ早いよ。
ちょっと工夫することで、パッと見たところは「乗法公式の形と違うから、使えないや・・・」と思った式でも、使える場合があるんだ。

ここでは、「ちょっと工夫することで乗法公式が使えるパターン」を紹介するよ。

まず、「乗法公式」をもう一度確認しよう。全部で4つあって、この4つを使うことで、速く展開することができるんだよね。

乗法公式

$$1、(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$2、(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

$$3、(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

$$4、(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

乗法公式について、「どういうものだったかな・・・？」と自身がなかったら、もう一度乗法公式について解説しているページをチェックしてね。

では、実際に乗法公式を使って、いろいろな式を展開する問題に挑戦してみよう。



(1) $(2x+3)(2x+4)$ を展開しなさい。

パッと見たただけだと、この式は乗法公式の4つ形のどれにも当てはまらないよね。

でも、「なんか似ているなあ」というものがあるね。

そう、乗法公式1の式「 $(x+a)(x+b)$ 」だよ。

乗法公式の「 x 」の部分が、問題では「 $2x$ 」になっているだけだからね。

この式だったら、乗法公式1の「 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 」を工夫して使えば、簡単に展開できそうな気がするね。

ではどういう工夫をするかというと、

「式の一部を、文字におきかえてしまう」んだ。

たとえば、「 $2x$ 」を「 A 」とおきかえてみよう。

そうすると

$$\begin{aligned} &(2x+3)(2x+4) \\ &=(A+3)(A+4) \end{aligned}$$

となるよね。

そうすると、なんと乗法公式1の「 $(x+a)(x+b)$ 」と同じ形になったね。

あとはそのまま「 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 」で展開すればよさそうだね。

$$(A+3)(A+4)$$

$$\begin{aligned} &(A+3)(A+4) \\ &\quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3+4 & 3 \times 4 \\ \hline \end{array} \\ &= A^2 + \bigcirc A + \triangle \end{aligned}$$

$$=A^2+(3+4)A+3 \times 4$$

$$=A^2+7A+12$$

無事に展開できて、「安心!」と思ってしまいそうだけれど、大事なことを思い出そう。



そう、「A」は仮におきかえただけの文字で、本当は「 $2x$ 」だったよね。
なので、最後にちゃんと「A」を「 $2x$ 」に戻してあげよう。

$$\begin{aligned} & A^2+7A+12 \\ & =(2x)^2+7\times 2x+12 \\ & =4x^2+14x+12 \end{aligned}$$

これで展開の完成だよ。もう一度やり方を確認してみよう。

($2x+3$)($2x+4$) の展開

$$\begin{aligned} & (2x+3)(2x+4) \leftarrow \text{「}2x\text{」を「}A\text{」とおこう} \\ & =(A+3)(A+4) \quad \leftarrow \text{乗法公式1を使って展開しよう。} \\ & =A^2+(3+4)A+3\times 4 \\ & =A^2+7A+12 \quad \leftarrow \text{「}A\text{」を「}2x\text{」にもどそう。} \\ & =(2x)^2+7\times 2x+12 \\ & =4x^2+14x+12 \end{aligned}$$

ちなみに「 $2x$ 」を「A」とおいて展開する方法を紹介したけれど、展開に慣れてくると
($2x+3$)($2x+4$)ぐらいなら、おきかえなくてもそのまま求めることもできるよ。

速く展開できる人の頭の中

$$\begin{aligned} & (2x+3)(2x+4) \\ & =(2x)^2+(3+4)\times 2x+3\times 4 \\ & =4x^2+14x+12 \end{aligned}$$

でも慣れないうちはミスも起こりやすいので、自身が持てるまでは、確実に展開できるように、文字でおきかえる方法でたくさん練習しよう。



(2) $(2x+3)^2$ を展開しなさい。

この式だったら、乗法公式2の「 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 」を使えば、簡単に展開できそうな気がするね。

$(x+a)^2$ みたいな「(前+後)²」の形の式を展開すると
「前の2乗+後ろの2乗+2倍の前後」になるんだったよね。

$(2x+3)^2$ の展開

$$\begin{array}{c} (2x+3)^2 \\ \text{前 後} \end{array}$$

- ・ 前の2乗 $= (2x)^2 = 4x^2$
- ・ 後ろの2乗 $= 3^2 = 9$
- ・ 2倍の前後 $= 2 \times (2x) \times 3 = 12x$

$(2x+3)^2$ を展開すると次のようになるよ。

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 \\ &= 4x^2 + 9 + 12x \leftarrow \text{「9」と「12x」の順番を入れ替えよう。} \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

(3) $(3x+4)(3x-4)$ を展開しなさい。

この式だったら、乗法公式4の「 $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ 」を使えば、簡単に展開できそうな気がするね。

「(前+後)(前-後)」のような形になっているから、展開すると「前の2乗-後ろの2乗」になるよ。



$(3x+4)(3x-4)$ の展開

$$\begin{array}{cccc} \underline{(3x+4)} & \underline{(3x-4)} & & \\ \text{前} & \text{後} & \text{前} & \text{後} \end{array}$$

- ・ 「前の2乗」 $= (3x)^2 = 9x^2$
- ・ 「後ろの2乗」 $= 4^2 = 16$

$(3x+4)(3x-4)$ を展開すると次のようになるよ。

$$\begin{aligned} &(3x+4)(3x-4) \\ &= 9x^2 - 16 \end{aligned}$$

(4) $(x+y+2)(x+y-4)$ を展開しなさい。

今までと違うのは、かっこの中の数字や文字が3つになっていることだね。こういうときは、3つの文字や数字を2つにすることを考えよう。

「 $(x+y+2)(x+y-4)$ 」という式を見ると、どちらにも「 $x+y$ 」があることがわかるかな？

この「 $x+y$ 」を「 A 」とおいてみよう。

$$\begin{aligned} &(x+y+2)(x+y-4) \\ &= (A+2)(A-4) \end{aligned}$$

この形にできてしまえば、あとは乗法公式1の「 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 」を使って展開すればいいよね。



$$(A+2)(A-4)$$

$$(A+2)(A-4)$$

$$= A^2 + \boxed{2-4}A + \boxed{2 \times (-4)}$$

$$= A^2 + (-2+4)A + 2 \times (-4)$$

$$= A^2 - 2A - 8$$

ここで「A」を「x+y」にもどすよ。

$$A^2 - 2A - 8$$

$$= (x+y)^2 - 2(x+y) - 8 \leftarrow (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{となるよね。}$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 8$$

これで展開完了。このあとも計算できそうだけど、同類項がないので終わりだよ。

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ となる理由

乗法公式2「 $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ 」の「a」を「y」として考えると、
「 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 」になるよ。

(5) $(x+y-3)^2$ を展開しなさい。

(4)と同じように、かっこの中の数字や文字が3つになっているね。こういうときは、3つの文字や数字を2つにすることを考えよう。

「 $(x+y-3)^2$ 」の「x+y」を「A」とおいてみよう。

そうすると

$$(x+y-3)^2$$

$$= (A-3)^2$$

になるよね。



この式だったら、乗法公式3の「 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ 」を使えば、簡単に展開できそうな気がするね。

$(x-a)^2$ みたいな「(前-後)²」の形の式を展開すると

「前の2乗+後ろの2乗-2倍の前後」になるんだったよね。

(A-3)²の展開

$$\begin{array}{c} (A - 3)^2 \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ \text{前} \quad \text{後} \end{array}$$

- ・前の2乗=A²
- ・後ろの2乗=3²=9
- ・2倍の前後=2×A×3=6A

(A-3)²を展開すると次のようになるよ。

$$\begin{aligned} (A-3)^2 \\ &= A^2 + 9 - 6A \quad \leftarrow \text{「9」と「-6A」の順番を入れ替えるよ。} \\ &= A^2 - 6A + 9 \end{aligned}$$

ここまで展開出来たら、「A」を「x+y」にもどそう。

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 9 \\ &= (x+y)^2 - 6(x+y) + 9 \quad \leftarrow (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{となるよね。} \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y + 9 \end{aligned}$$

(6) $(x-3)^2 - (x+2)(x-4)$ を展開しなさい。

この式は今までと比べると長くて難しそうに感じるけど、分けて考えよう。



① $(x-3)^2$ の展開

$(x-a)^2$ みたいな「(前-後)²」の形の式を展開すると
「前の2乗+後ろの2乗-2倍の前後」になるんだよね。

$(x-3)^2$ の展開

$$\begin{array}{cc} (x - 3)^2 \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ \text{前} \quad \text{後} \end{array}$$

- ・前の2乗= x^2
- ・後ろの2乗= $3^2=9$
- ・2倍の前後= $2 \times x \times 3=6A$

$(x-3)^2$ を展開すると次のようになるよ。

$$\begin{aligned} (x-3)^2 \\ =x^2+9-6x &\leftarrow \text{「}9\text{」と「}-6x\text{」の順番を入れ替えるよ。} \\ =x^2-6x+9 \end{aligned}$$

② $(x+2)(x-4)$ の展開

乗法公式1の「 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 」を使って展開するよ。

$(x+2)(x-4)$

$$\begin{array}{c} (x+2)(x-4) \\ \begin{array}{cc} \boxed{2-4} & \boxed{2 \times (-4)} \\ \text{ } & \text{ } \end{array} \\ = x^2 + \bigcirc x + \triangle \end{array}$$

$$\begin{aligned} =x^2+(2-4)x+2 \times (-4) \\ =x^2-2x-8 \end{aligned}$$



③ $(x-3)^2-(x+2)(x-4)$ の展開

①と②から次のように $(x-3)^2-(x+2)(x-4)$ は展開できるよ。

$$\begin{aligned}(x-3)^2-(x+2)(x-4) \\ &=x^2-6x+9-(x^2-2x-8) \\ &=x^2-6x+9-x^2+2x+8 \\ &=-4x+17\end{aligned}$$

よくある間違い

$$\begin{aligned}(x-3)^2-(x+2)(x-4) \\ (\text{誤}) &=x^2-6x+9-x^2-2x-8 \\ (\text{正}) &=x^2-6x+9-(x^2-2x-8)\end{aligned}$$

展開した後、かっこをつけわすれないようにしましょう。

